



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



M 1 7 2 4 0 2 1 1 1

SESSIONE AUTUNNALE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 1 ≡

**Venerdì, 25 agosto 2017 / 90 minuti**

*Materiali e sussidi consentiti:*

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello. Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. La pagina 16 è di riserva, usatela solo in mancanza di spazio. Indicate con chiarezza quali quesiti avete risolto su tale pagina. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 16 pagine, delle quali 1 di riserva.*





## Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n$  è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  $d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ,  $a > b$

Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ,  $a$  è il semiasse reale

Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli:  $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale:  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

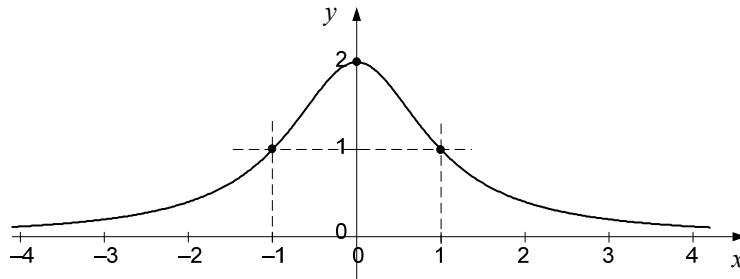


1. Scrivete l'equazione della retta  $p$  che passa per i punti  $T_1(4, 1)$  e  $T_2(-2, 4)$ . Determinate l'ordinata  $y_3$  del punto  $T_3(-12, y_3)$  in modo che esso appartenga alla retta  $p$ .

(6 punti)



2. La figura mostra una parte del grafico della funzione derivabile  $f$  che si avvicina asintoticamente all'asse delle ascisse e il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. La funzione  $f$  non ha zeri. Scrivete le constatazioni che valgono per tale funzione e che si possono dedurre dal grafico.



L'insieme di definizione della funzione $f$	$D_f =$
L'insieme immagine della funzione $f$	$I_f =$
Le coordinate dell'intersezione del grafico della funzione $f$ con l'asse delle ordinate	
Il valore della funzione $f$ per $x = -1$	$f(-1) =$
Per quale valore di $x$ la funzione $f$ raggiunge il massimo assoluto?	
La funzione $f$ è pari o dispari? Argomentate la risposta.	
Scrivete il valore di $f'(0)$	$f'(0) =$

(8 punti)



3. La somma delle lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo è 56, la lunghezza della sua ipotenusa è 40. Calcolate le lunghezze dei cateti.

(6 punti)

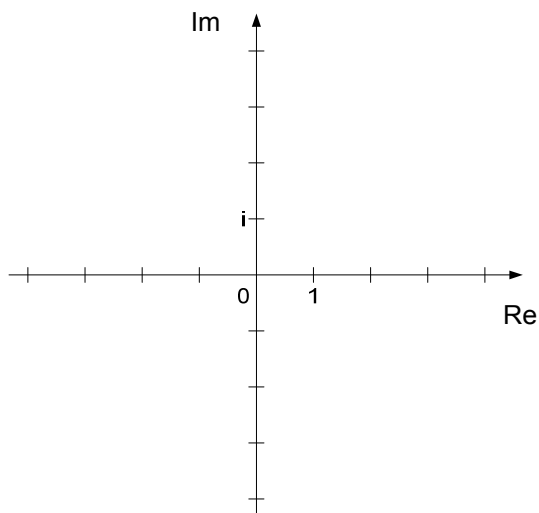


4. Disegnate nel piano complesso gli insiemi di punti

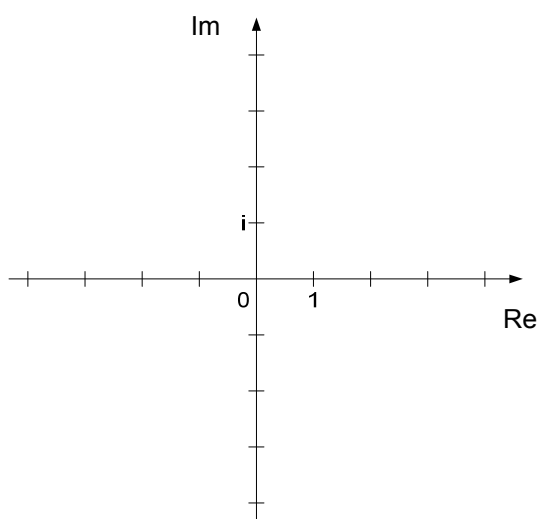
$$A = \{z \in \mathbb{C}; (-1 \leq \operatorname{Re} z < 2) \wedge (1 \leq \operatorname{Im} z < 3)\} \text{ e}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 3\}.$$

Scegliete un numero  $z_1$  dell'insieme  $A$  e scrivetelo nella forma  $z_1 = a + bi$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ .



Insieme  $A$



Insieme  $B$

(6 punti)



5. Calcolate l'integrale indefinito  $\int \left( \frac{2x^2 - 3}{x} + \sqrt[3]{x^2} - e^x + 5 \right) dx$ .

(8 punti)





6. I punti  $A$ ,  $B$  e  $S$  giacciono su uno stesso piano. Il punto  $S\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$  è il punto medio del segmento  $AB$ . Scrivete le coordinate del punto  $B$  se  $A(3, 4)$ . I raggi vettori  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$  sono perpendicolari tra loro? Argomentate la risposta.

(7 punti)

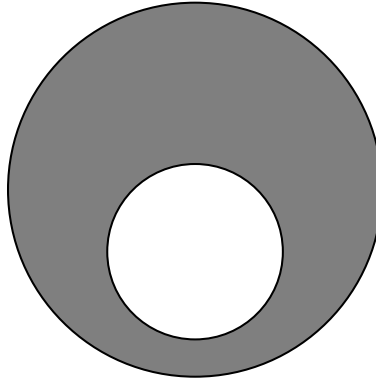


7. La base di una piramide retta è un rettangolo di lati  $a=12$  e  $b=5$ , l'altezza della piramide è 8. Disegnate lo schizzo e indicate su di esso l'angolo  $\varphi$  tra lo spigolo laterale e la base. Calcolate il volume della piramide e l'ampiezza dell'angolo  $\varphi$  con l'esattezza al decimo di grado.

*(7 punti)*



8. La figura mostra una parte di piano delimitata dalle curve di equazione  $(x-3)^2 + y^2 = 9$  e  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$ . Calcolate l'area della parte ombreggiata tra le curve. Il risultato sia esatto.



(6 punti)



9. Gli angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono gli angoli acuti di un triangolo. Dimostrate, senza far uso della calcolatrice, che  $\sin\gamma = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$  se  $\cos\alpha = \frac{1}{3}$  e  $\beta = 30^\circ$ .

(6 punti)



10. Scegliamo a caso due numeri tra i primi 30 numeri naturali. Calcolate la probabilità degli eventi:

$A$  – ambedue i numeri sono pari,

$B$  – almeno un numero è un multiplo del numero 3.

(7 punti)



11. Il prezzo di un maglione è ribassato del 20 % ma, non essendo stato venduto, viene ulteriormente ribassato del 30 %. Dopo il secondo ribasso Jan ha acquistato il maglione pagandolo 30,24 € . Rispondete con delle frasi alle domande seguenti.

Quale percentuale del prezzo iniziale del maglione è stata pagata da Jan?

Qual era il prezzo iniziale del maglione?

Qual era il prezzo del maglione immediatamente prima del secondo ribasso?

(5 punti)



12. È data una successione di termine generale  $a_n = \frac{1+2^n}{4^n}$ .

12.1. Calcolate e scrivete i primi tre termini di tale successione.

(2)

12.2. Calcolate il limite di tale successione.

(1)

12.3. Scrivete la successione come somma di due successioni geometriche e calcolate la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

(5)

(8 punti)



PAGINA DI RISERVA