



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



SESSIONE AUTUNNALE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 1 ≡

- B) Quesiti strutturati brevi  
C) Quesiti strutturati

**Giovedì, 25 agosto 2022 / 90 minuti (45 + 45)**

*Materiali e sussidi consentiti:*

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice. Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

~~Nella risoluzione di questa prova d'esame non è consentito l'uso della calcolatrice.~~

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.



**Formule**

**(Somma e differenza di potenze a esponente naturale)** Per qualsiasi  $a, b \in \mathbb{R}$  e per qualsiasi numero naturale  $n$  vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

**(Teorema di Euclide e dell'altezza)** Il triangolo rettangolo ha i cateti  $a$  e  $b$  e l'ipotenusa  $c$ . L'altezza all'ipotenusa è  $h_c$ , la proiezione ortogonale del cateto  $a$  all'ipotenusa è  $a_1$ , la proiezione ortogonale del cateto  $b$  all'ipotenusa è  $b_1$ . Quindi vale  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$ .

**(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo)** Il triangolo ha i lati  $a, b$  e  $c$ , il semiperimetro è  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , l'area è  $A$ , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato è  $r$  e il raggio della circonferenza circoscritta la triangolo dato è  $R$ . Quindi è  $r = \frac{A}{p}$  e

$$R = \frac{abc}{4A}$$

**(Formula di Erone)** Il triangolo ha i lati  $a, b$  e  $c$ , il semiperimetro è  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Allora la sua area è

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**(Area del triangolo)** Siano  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici  $A, B$  e  $C$  è uguale a

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

**(Sfera)** L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio  $r$  sono  $S = 4\pi r^2$ ,  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ .

**(Distanza di un punto da una retta)** Siano  $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  e dove  $a$  e  $b$  non siano uguali a 0. La distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $p$ , espressa dall'equazione  $ax + by - c = 0$ , è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**(Logaritmo)** Siano  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ . Quindi per ogni  $x > 0$  vale  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .

**(Teoremi di addizione)** Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$ , per i quali  $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$  per qualsiasi  $k \in \mathbb{Z}$  e

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

**(Formule di bisezione)** Per qualsiasi  $x \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Per qualsiasi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$  vale  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ .

**(Formule di prostaferesi)** Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$



**(Formule del Werner)** Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

**(Ellisse)** L'ellisse nel piano ha i semiassi  $a$  e  $b$  ( $a > b$ ), la sua eccentricità lineare è  $e$ , la sua eccentricità numerica è  $\varepsilon$ . Quindi vale  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Iperbole)** L'iperbole nel piano ha il semiasse reale  $a$  e il semiasse immaginario  $b$ , la sua eccentricità lineare è  $e$ , la sua eccentricità numerica è  $\varepsilon$ . Quindi vale  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Parabola)** Parabola nel piano di equazione  $y^2 = 2px$  ha il fuoco in  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , l'equazione della retta direttrice della parabola è  $x = -\frac{p}{2}$ .

**(Successione aritmetica)** La somma dei primi  $n$  termini della successione aritmetica  $(a_n)$  è  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ .

**(Successione geometrica)** La somma dei primi  $n$  termini della successione geometrica  $(a_n)$  di ragione  $q \in \mathbb{R}$  è  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ , se  $q \neq 1$ , e  $S_n = na_1$ , se  $q = 1$ .

**(Limiti)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**(Integrale indefinito)** Sia  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Allora per ogni  $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

**(Integrazione per partes)** Sia  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

**(Volume del solido di rotazione)** Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione  $f$ , l'asse delle ascisse e le rette  $x = a$  e  $x = b$ , attorno all'asse delle ascisse di  $360^\circ$ , è  $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ .

**(Formula di Bernouilli)** Sia  $p$  la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento  $A$ . La probabilità che l'evento  $A$  in  $n$  prove successive si realizzi  $k$  volte è  $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**Foglio per la minuta**



**Foglio per la minuta**

A large, empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



### Foglio per la minuta



**Foglio per la minuta**

A large empty rectangular box intended for handwritten notes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**B) QUESITI STRUTTURATI BREVI**

1. È dato il numero 12345678900123456789001234567890012345678900. Nella tabella sottostante, accanto a ogni affermazione, cerciate Sì se l'affermazione relativa a ogni numero dato è corretta (esatta), oppure NO, se l'affermazione non è corretta (sbagliata).

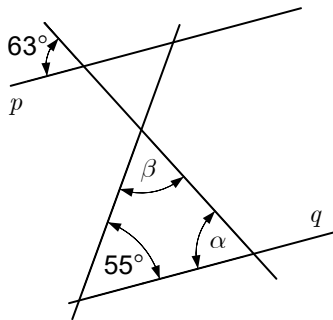
Affermazione	Correttezza/Non correttezza dell'affermazione	
Il numero è divisibile per 3.	Sì	NO
Il numero è divisibile per 4.	Sì	NO
Il numero è divisibile per 5.	Sì	NO
Il numero è divisibile per 6.	Sì	NO
Il numero è divisibile per 8.	Sì	NO
Il numero è divisibile per 9.	Sì	NO
Il numero è divisibile per 25.	Sì	NO

(7 punti)



2. Calcolate gli angoli sconosciuti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  nelle figure sottostanti.

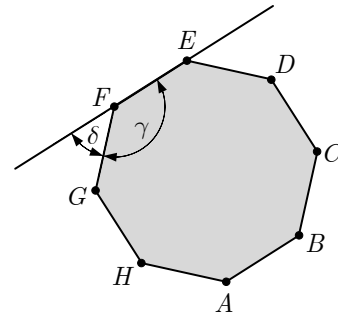
Le rette  $p$  e  $q$  nella figura sono parallele.



$$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

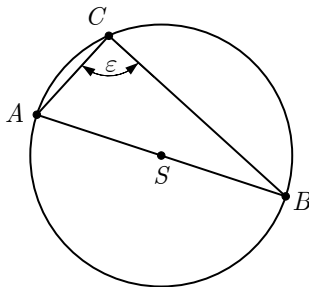
La figura geometrica  $ABCDEFGH$  nella figura è un ottagono regolare.



$$\gamma = \underline{\hspace{2cm}}$$

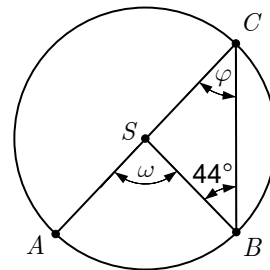
$$\delta = \underline{\hspace{2cm}}$$

La circonferenza nella figura ha il centro  $S$  e il diametro  $AB$ .



$$\varepsilon = \underline{\hspace{2cm}}$$

La circonferenza nella figura ha il centro  $S$  e il diametro  $AC$ .



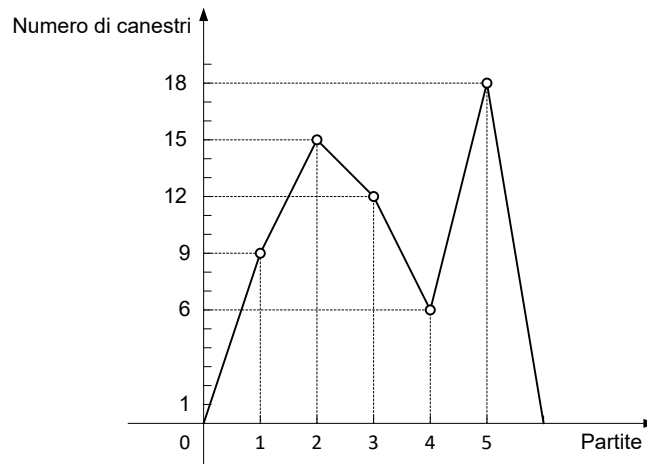
$$\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\omega = \underline{\hspace{2cm}}$$

(7 punti)



3. Marko e Žiga giocano a basket. Marko ha giocato cinque partite, Žiga invece tre. Il numero di canestri realizzati da Marko durante le partite nelle quali ha giocato è rappresentato nel sottostante poligono di frequenza:



Il numero di canestri realizzati da Žiga è invece riportato nella sottostante tabella:

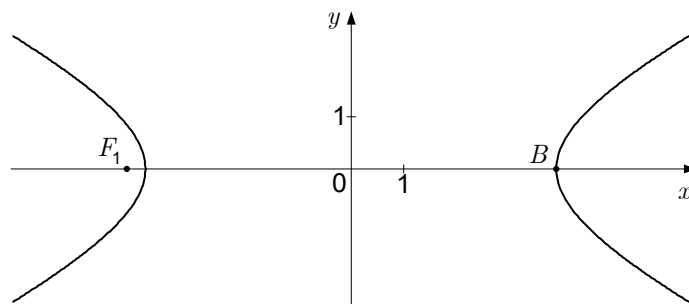
	Numero di canestri
1. partita	$x$
2. partita	9
3. partita	17

Quanti canestri ha realizzato Žiga nella prima partita, se la media di canestri realizzati per partita dai due ragazzi è la stessa?

(6 punti)



4. L'iperbole nella figura ha un fuoco nel punto  $F_1(-\sqrt{20}, 0)$ , un vertice nel punto  $B(4, 0)$ . Scrivete l'equazione dell'iperbole e le equazioni dei suoi asintoti.



(8 punti)



5. Nei riquadri sottostanti sono riportati i grafici delle funzioni  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Per ogni grafico di una funzione nella colonna di sinistra, scegliete quella lettera della colonna di destra nel quale è disegnato il grafico della corrispondente derivata. Aiutatevi con l'esempio risolto.

	<b>C</b>	<b>A</b>	
		<b>B</b>	
		<b>C</b>	
		<b>D</b>	
		<b>E</b>	
		<b>F</b>	

(5 punti)



6. Verificate che il numero 2 è uno zero doppio del polinomio  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40$ .  
Determinate le altre due soluzioni (complesse) dell'equazione  $p(x) = 0$ . Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice.

(7 punti)



M 2 2 2 4 0 2 1 1 1 1 5

# Pagina di riserva

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

**VOLTATE IL FOGLIO.**

**C) QUESITI STRUTTURATI**

1. Risolvete nell'insieme dei numeri interi le equazioni sottostanti.

1.1.  $1 + n(1 + n(1 + n(1 + n(1 + n)))) = \frac{63}{n-1}$

(4 punti)

1.2.  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} + 32 - n$

(3 punti)

1.3.  $111 \ 111 \ 111 \ 114^2 - 111 \ 111 \ 111 \ 112^2 = 4n$

(3 punti)



Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



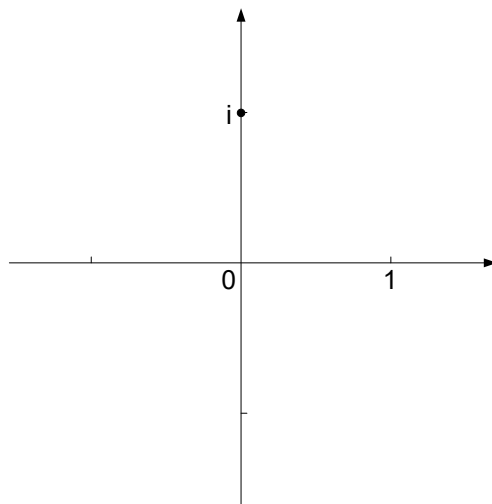
A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. It is intended for the user to provide an answer or drawing.



2. Risolvete il quesito senza usare la calcolatrice. È dato l'insieme dei numeri complessi

$$A = \{z_1, z_2, z_3\}, \quad z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \text{ e } z_3 = 1.$$

2.1. Riportate i numeri  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  nel piano complesso e dimostrate che essi appartengono alla stessa circonferenza di centro  $(0, 0)$ .



2.2. Verificate che vale l'affermazione: il prodotto di due elementi qualsiasi dell'insieme  $A$  è elemento dell'insieme  $A$ . (4 punti)

2.3. Sia  $B = \{z_1, z_2, z_3, -z_1, -z_2, -z_3\}$ . Verificate che vale  $z_1 + z_2 = -z_3$ ,  $z_2 + z_3 = -z_1$  e  $z_3 + z_1 = -z_2$ . È valida l'affermazione: la somma di un numero, grande a piacere, di addendi, tutti elementi dell'insieme  $B$ , è anche elemento dell'insieme  $B$ ? Argomentate la risposta. (4 punti)

(2 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten input.



# Pagina di riserva