



Codice del candidato:

Državni izpitni center



M 0 8 1 4 0 2 1 1 1

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 1 ≡

Sabato, 7 giugno 2008 / 90 minuti

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, di una calcolatrice tascabile priva di interfaccia grafica e possibilità di calcolo con simboli, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.

Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e due schede di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulle due schede di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 2.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verrà assegnato il punteggio di zero (0). Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, di cui 2 bianche.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritte ed inscritte ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$
- Teoremi di addizione:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

01. Sia \mathcal{A} l'insieme di tutti i numeri primi minori di 20, \mathcal{B} l'insieme di tutti i divisori del numero 12 e \mathcal{C} l'insieme di tutti i multipli del numero 3, minori di 20. Scrivete gli insiemi \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

(7 punti)

02. Calcolate tutti gli zeri della funzione $f(x) = \tan x - 1$ e l'intersezione del suo grafico con l'asse delle ordinate.

(6 punti)

03. Scrivete l'equazione della funzione quadratica che per $x = 1$ ha come valore estremo 4 e in $x_1 = 3$ ha lo zero.

(7 punti)

04. Alcune rondini sono migrate a sud formando tre stormi. Il rapporto tra il numero degli uccelli nei tre stormi è $3 : 10 : 17$. Nello stormo più grande ci sono 72 uccelli in più che negli altri due stormi messi insieme. Di quante rondini è composto ciascuno stormo?

(6 punti)

05. Calcolate il valore esatto dell'integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3 \cos x - x) dx$.

(6 punti)

06. Risolvete l'equazione $2x + 3 = \sqrt{x + 3}$.

(6 punti)

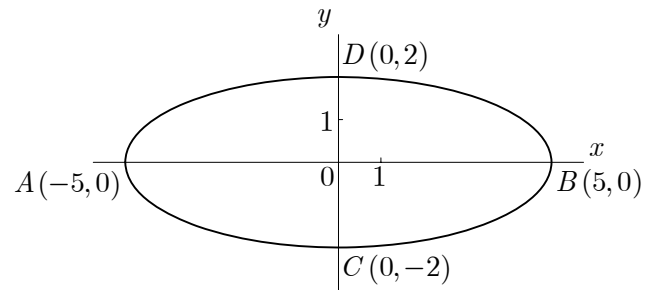
07. Verificate che il numero 2 è uno zero doppio del polinomio

$p(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40$. Calcolate anche i rimanenti due zeri (complessi).

(7 punti)

08. La figura sottostante rappresenta un'ellisse di vertici A , B , C e D . Scrivete le coordinate esatte dei fuochi dell'ellisse. Scrivete anche l'equazione della circonferenza avente come centro il punto B e passante per l'origine del sistema di coordinate.

(8 punti)



09. Le diagonali del rettangolo $ABCD$ di lato $|AB| = a = 10$ cm si intersecano nel punto S formando un angolo $\sphericalangle BSC = \varphi = 40^\circ$. Calcolate il perimetro del rettangolo esprimendo il risultato con tre cifre significative. Disegnate anche uno schizzo della figura.

(6 punti)

10. Calcolate la base a della funzione logaritmica $f(x) = \log_a x$ il cui grafico passa per il punto

$$A\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}\right).$$

(6 punti)

11. Da un gruppo composto di 7 maschi e 5 femmine vengono estratte a caso 4 persone. Calcolate la probabilità dell'evento A , che vengano estratti tre maschi e una femmina.

(7 punti)

12. Il quinto termine di una successione geometrica è otto volte maggiore del suo secondo termine, mentre il prodotto del secondo e del quarto termine corrisponde a 144. Calcolate il primo termine a_1 e la ragione q della successione.

(8 punti)

Pagina bianca

Pagina bianca