



Codice del candidato:

Državni izpitni center



M 1 9 1 4 0 2 1 1 1

SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 1 ≡

Sabato, 8 giugno 2019 / 90 minuti

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.

Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 12 quesiti, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 80 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Scrivete le vostre risposte negli spazi appositamente previsti **all'interno della prova** utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. La pagina 16 è di riserva, usatela solo in mancanza di spazio. Indicate con chiarezza quali quesiti avete risolto su tale pagina. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, delle quali 1 di riserva.



Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, se $a > b$

Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli: $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$



1. Risolvete i quesiti scritti nella colonna di sinistra della tabella. Scrivete le soluzioni nella colonna di destra della tabella. Basatevi sull'esempio risolto.

<p>Scrivete l'insieme immagine della funzione espressa dalla dipendenza $f(x) = x^2 + 3$.</p>	$I_f = [3, \infty)$
<p>Determinate il minimo comune multiplo dei numeri 20 e 30.</p>	$m.c.m.(20, 30) =$
<p>Risolvete l'equazione $x = 5$.</p>	$x_1 =$, $x_2 =$
<p>Determinate la distanza tra i punti $A(-1, 1)$ e $B(3, 1)$ nel piano \mathbb{R}^2.</p>	$d(A, B) =$
<p>Determinate l'insieme maggiore D_f, per il quale la funzione espressa dalla dipendenza $f(x) = \sqrt{x-2}$ è definita.</p>	$D_f =$
<p>Scrivete la parte reale del numero complesso $z = i^6 + i^7$.</p>	$\text{Re}(z) =$

(8 punti)



M 1 9 1 4 0 2 1 1 0 5

2. Peter è un atleta e pratica il salto dal trampolino con gli sci; durante un allenamento, nei primi quattro salti ha raggiunto le seguenti distanze: 95 m, 101 m, 93 m e 95 m.

2.1. Calcolate la distanza media dei salti effettuati.

(2)

2.2. Quanto deve essere lungo il quinto salto per aumentare la media a 98 m?

(3)

(5 punti)



3. Risolvete le seguenti equazioni:

3.1.

$$2^{x+3} \cdot 2^{x+5} = 32$$

(3)

3.2.

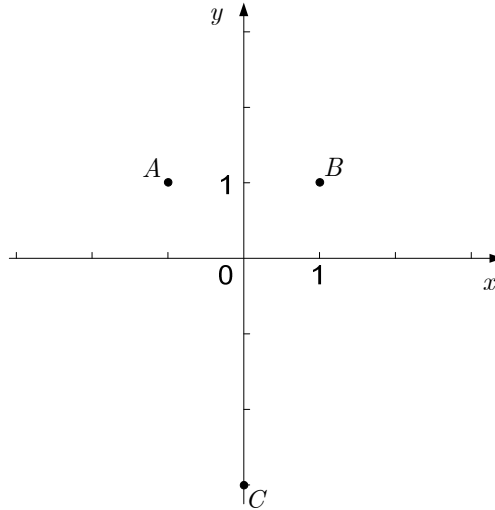
$$2^{x+3} + 2^{x+5} = 5$$

(3)

(6 punti)



4. Nella figura sottostante, nella quale ci sono i punti $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$ e $C(0, -3)$, disegnate i vettori $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Scrivete i vettori \vec{a} e \vec{b} con le coordinate (con le componenti) e calcolate il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Arrotondate l'ampiezza dell'angolo α , racchiuso dai vettori \vec{a} e \vec{b} , ai gradi con due cifre decimali. Scrivete i risultati nella tabella sottostante.

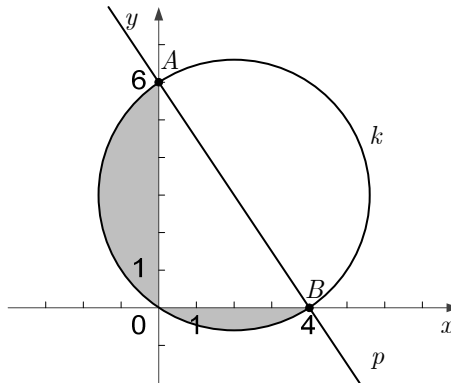


Quesito	Soluzione
Il vettore \vec{a} scritto con le coordinate	$\vec{a} = (\quad , \quad)$
Il vettore \vec{b} scritto con le coordinate	$\vec{b} = (\quad , \quad)$
Il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$
L'ampiezza calcolata con approssimazione dell'angolo α	$\alpha \doteq$

(8 punti)



5. La figura mostra la retta p e la circonferenza k . La retta p passa per i punti A e B , il diametro della circonferenza k è il segmento AB .



- 5.1. Scrivete l'equazione della retta p . (2)
- 5.2. Scrivete l'equazione della circonferenza k . (3)
- 5.3. Calcolate la somma delle aree dei settori ombreggiati nella figura. Risolvete il quesito senza far uso della calcolatrice. (3)
- (8 punti)



M 1 9 1 4 0 2 1 1 1 0 9

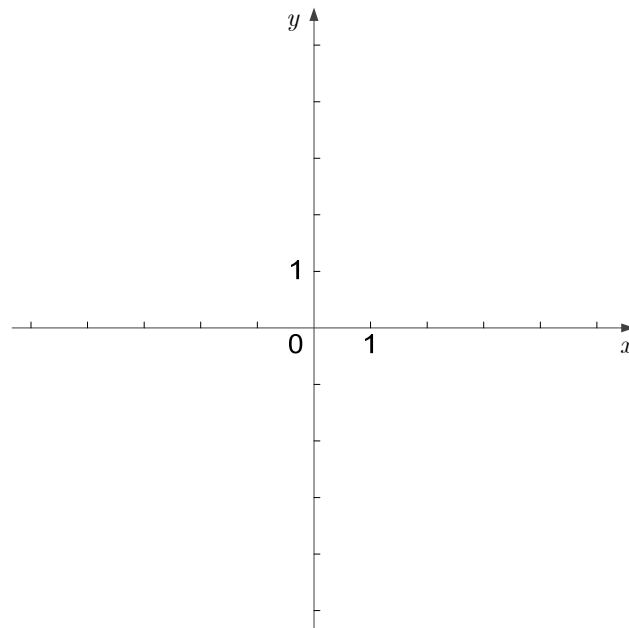
6. Nel triangolo ABC il lato AB misura 6 cm. L'angolo $\alpha = \sphericalangle BAC$ misura 70° e l'angolo $\gamma = \sphericalangle ACB$ misura 30° . Calcolate la lunghezza del lato AC e l'area del triangolo ABC . Arrotondate i risultati a due cifre decimali.

(6 punti)



7. La funzione razionale f è espressa dalla dipendenza $f(x) = \frac{x-2}{x}$.

7.1. Scrivete le equazioni degli asintoti al grafico della funzione f e tracciate il suo grafico.



7.2. Calcolate la derivata della funzione f .

(3)

7.3. Calcolate l'integrale indefinito della funzione f .

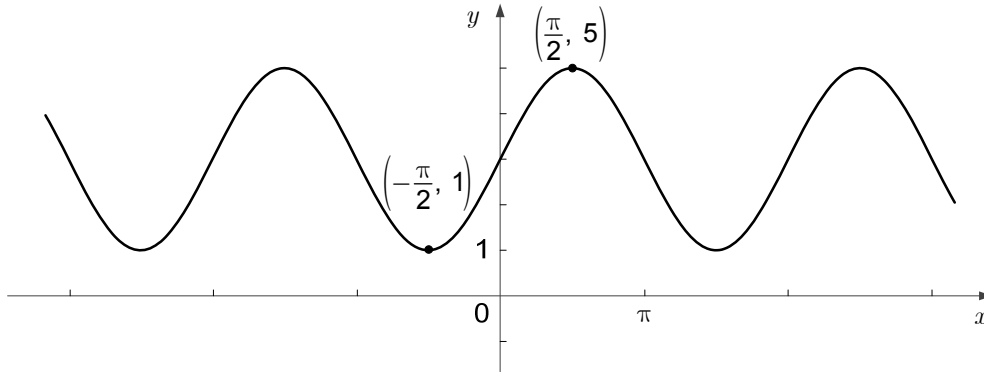
(2)

(3)
(8 punti)



8. Risolvete i quesiti seguenti:

- 8.1. La figura mostra una parte del grafico della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ espressa dalla dipendenza $f(x) = A \sin x + C$, dove $A, C \in \mathbb{R}$. La funzione f ha il massimo relativo $M = 5$ e il minimo relativo $m = 1$. Determinate i numeri A e C .



- 8.2. È data la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ espressa dalla dipendenza $g(x) = -2 \sin x + 1$. Calcolate tutti i punti d'intersezione del grafico della funzione g con la retta di equazione $y = 2$. (2)

(5)
(7 punti)



9. In un sacchetto ci sono 50 biglietti: di essi, 40 fanno vincere un premio, mentre 10 no.
- 9.1. Estraiamo a caso un biglietto dal sacchetto. Calcolate la probabilità dell'evento A , che il biglietto estratto faccia vincere un premio. (1)
- 9.2. Estraiamo a caso contemporaneamente dal sacchetto due biglietti. Calcolate la probabilità dell'evento B , che ambedue i biglietti estratti facciano vincere un premio. (3)
- 9.3. Estraiamo a caso contemporaneamente dal sacchetto tre biglietti. Calcolate la probabilità dell'evento C , che almeno uno dei biglietti estratti faccia vincere un premio. (3)
- (7 punti)



M 1 9 1 4 0 2 1 1 1 3

10. La signora Maria ha depositato 12.500 € in una banca, che calcola l'interesse composto con un tasso annuo dell' 1,5% . La banca accredita gli interessi allo scadere di ogni anno dal momento in cui è avvenuto il versamento del denaro. Nel quesito tenete in considerazione che la banca non cambia le sue condizioni e che Maria non preleverà il denaro per i prossimi 4 anni.

10.1. Quanti Euro d'interessi sono stati accreditati a Maria allo scadere del primo anno dal momento in cui è avvenuto il versamento? Scrivete la risposta.

(2)

10.2. Di quanto denaro dispone Maria in banca allo scadere dei quattro anni dal momento in cui ha effettuato il versamento? Scrivete la risposta.

(3)

(5 punti)



11. Scrivete il numero 2019 come somma dei due numeri reali x e y in modo che il valore dell'espressione $xy - 6x - 9y + 56$ sia massimo.

(6 punti)



M 1 9 1 4 0 2 1 1 1 5

12. Sulla pista da sci Punta gelida è possibile acquistare un biglietto giornaliero per gli adulti oppure un biglietto giornaliero per minori di 18 anni, che costa il 40 % in meno rispetto a quello per gli adulti. Inoltre, è possibile iscrivere i bambini in età prescolare a un corso di sci sotto la guida di istruttori professionisti. In questo caso il prezzo del biglietto è compreso nel prezzo del corso di sci.

I membri della famiglia Novak si stanno preparando per passare una giornata intera sulla pista da sci Punta gelida. Il papà, la mamma e il figlio maggiore Massimo, che ha quindici anni, acquisteranno i biglietti giornalieri, mentre i gemelli di cinque anni Ana e Tim trascorreranno la giornata con gli istruttori del corso di sci. Complessivamente la famiglia Novak spenderà 261 €.

Anche i membri della famiglia Drolc si stanno preparando a passare una giornata sulla pista da sci Punta gelida. Il papà, la mamma, la figlia Maja di dieci anni e il figlio Bor di tredici anni acquisteranno i biglietti giornalieri, mentre la figlia Julija di quattro anni trascorrerà la giornata con gli istruttori del corso di sci. Complessivamente la famiglia Drolc spenderà 197 €.

Quant'è il prezzo del biglietto giornaliero per gli adulti e quant'è il prezzo del corso di sci di una giornata per un bambino?

(6 punti)



PAGINA DI RISERVA