



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



M 1 0 2 4 0 2 1 2 I

SESSIONE AUTUNNALE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 2 ≡

**Giovedì, 26 agosto 2010 / 90 minuti**

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, di una calcolatrice tascabile priva di interfaccia grafica e possibilità di calcolo con simboli, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.*

*Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

La prova d'esame si compone di 3 quesiti strutturati, risolvendo correttamente i quali potete conseguire fino a un massimo di 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 2.

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verrà assegnato il punteggio di zero (0). Le pagine 10, 11 e 12 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 12 pagine, di cui 1 bianca e 3 di riserva.*

## Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,  $r = \frac{A}{p}$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:  

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:  

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$
- Teoremi di addizione:  

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:  

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:  

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$
- Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :  

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a > b$
- Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ;  $a$  è il semiasse reale.
- Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:  

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

# Pagina bianca

**VOLTATE IL FOGLIO.**

01. È data la serie geometrica  $4^x + 4^{2x} + 4^{3x} + \dots$ .

a) Per quali numeri reali  $x$  la serie è convergente?

(3 punti)

b) Calcolate  $x$  in modo che la somma della serie sia uguale al doppio del suo primo termine.

(3 punti)

c) Calcolate  $x$  in modo che il quadrato del primo termine della serie sia uguale a sette volte il quinto termine della serie. Esprimete il risultato a cinque cifre decimali.

(3 punti)

d) Scrivete per  $x = -1$  la somma  $s_n$  dei primi  $n$  termini della serie. Quale numero minimo di termini della serie dobbiamo sommare affinché la somma  $s_n$  si differenzi dalla somma della serie infinita per un valore minore di  $10^{-10}$ ?

(5 punti)



02. È dato il polinomio  $p(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + 3$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- a) Calcolate per  $a = 0$  e  $b = -7$  gli zeri del polinomio. Determinate il campo di esistenza della funzione  $f(x) = \sqrt{4x^3 - 7x + 3}$ . (6 punti)
- b) Calcolate  $a$  e  $b$  se uno degli zeri del polinomio  $p$  è il numero  $1 - i\sqrt{2}$ . (4 punti)
- c) Calcolate  $a$  e  $b$  se la retta tangente al grafico del polinomio  $p$  nel punto  $T(1, 6)$  è parallela alla retta  $2x - y + 5 = 0$ . (4 punti)



03. Una parabola ha il vertice  $T(1,2)$  e la retta direttrice di equazione  $x = -2$ .
- a) Scrivete l'equazione della parabola e determinate l'intersezione con l'asse delle ascisse. *(4 punti)*
- b) Scrivete l'equazione della circonferenza avente il centro nel vertice della parabola e che, intersecando la retta direttrice della parabola stessa, crea una corda di lunghezza 8. *(3 punti)*
- c) Dimostrate che uno dei fuochi dell'iperbole di equazione  $3x^2 - y^2 + 4y - 7 = 0$  appartiene alla retta direttrice della parabola. *(5 punti)*





PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA