



Codice del candidato:

--

Državni izpitni center



SESSIONE AUTUNNALE

Livello superiore
MATEMATICA
≡ Prova d'esame 2 ≡

Venerdì, 25 agosto 2017 / 90 minuti

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.

Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

Nella prova dovrete risolvere tre dei 4 quesiti strutturati proposti. I primi due quesiti sono obbligatori, mentre potete scegliere tra gli altri due quello che intendete risolvere. Si possono conseguire al massimo 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Indicate con una "x" nella tabella quale dei due quesiti avete scelto. Senza tale indicazione il valutatore procederà alla correzione del primo quesito che avrete risolto.

3	4

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine dalla 12 alla 16 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 16 pagine, delle quali 5 di riserva.



Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, se n è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo : $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\text{Distanza del punto } T_0(x_0, y_0) \text{ dalla retta } ax + by - c = 0: \quad d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

$$\text{Ellisse: } e^2 = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}, \quad a > b$$

$$\text{Iperbole: } e^2 = a^2 + b^2, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}, \quad a \text{ è il semiasse reale}$$

$$\text{Parabola: } y^2 = 2px, \quad \text{fuoco } F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$\text{Compositum di funzioni: } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\text{Formula di Bernoulli: } P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{Integrale: } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$



Il quesito strutturato 1 è obbligatorio.

1. È data l'equazione quadratica $(2m^2 + 3)x^2 + (3m^2 - 2)x + m^2 - 5 = 0$ di incognita x e con parametro reale m .
 - 1.1. Dimostrate che l'equazione ha soluzioni reali per tutti i valori possibili del parametro m .
(3 punti)
 - 1.2. Calcolate le soluzioni dell'equazione. Determinate tutti i valori del parametro m per i quali ambedue le soluzioni sono negative.
(6 punti)
 - 1.3. Per quali valori del parametro m la somma delle soluzioni dell'equazione è minima? Calcolate le soluzioni in questo caso.
(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 7 2 4 0 2 1 2 1 0 5



Il quesito strutturato 2 è obbligatorio.

2. Risolvete i quesiti seguenti sulle successioni.

2.1. La somma di tre termini successivi di una successione geometrica crescente è 52. Se sommiamo al primo termine 1, al secondo 8, diminuiamo il terzo di 1, otteniamo i termini successivi di una successione aritmetica. Calcolate i primi tre termini delle due successioni. (Le soluzioni indovinate non saranno valutate.)

(6 punti)

2.2. Gli angoli interni di un triangolo α , β e γ sono i termini successivi di una successione aritmetica.

Dimostrate che per i lati a , b e c di tale triangolo vale l'espressione $a^2 - ac + c^2 = b^2$.

(3 punti)

2.3. Calcolate tutti i valori del parametro m , $m > 0$, tali che le soluzioni dell'equazione $x^4 - (1 + m^2)x^2 + m^2 = 0$ siano i termini successivi di una successione aritmetica.

(5 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 7 2 4 0 2 1 2 1 0 7



Il quesito strutturato 3 è a scelta. Potete scegliere tra i quesiti strutturati 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina della prova d'esame.

3. È data la funzione $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ espressa dalla dipendenza $f(x) = 2 \ln x$.

3.1. Risolvete l'equazione $2f(x) = f(2x)$.

(3 punti)

3.2. Dimostrate che $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$.

(3 punti)

3.3. Dimostrate per induzione matematica che per ogni numero naturale n vale

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

(4 punti)

3.4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\right)$ è convergente? Argomentate la risposta.

(3 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 7 2 4 0 2 1 2 1 0 9



Il quesito strutturato 4 è a scelta. Potete scegliere tra i quesiti strutturati 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina della prova d'esame.

4. I vettori di base $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ definiscono il parallelogramma $ABCD$.

4.1. Siano $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x-1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{b} = (2, \sqrt{x-1})$. Per quali valori della variabile x il parallelogramma diventa un rettangolo?

(4 punti)

4.2. Sul lato BC giace il punto E tale che $|\overrightarrow{BE}| : |\overrightarrow{EC}| = 1 : 3$. Il punto F dimezza il lato CD , i segmenti AE e BF si intersecano nel punto S . Calcolate il rapporto $|AS| : |SE|$.

(5 punti)

4.3. Calcolate la lunghezza del vettore $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ se $|\vec{a}| = 4$, $|2\vec{a} - \vec{b}| = 7$ e $|\vec{a}| < |\vec{b}|$. L'angolo tra i vettori \vec{a} e \vec{b} misura 60° .

(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 7 2 4 0 2 1 2 1 1 1



PAGINA DI RISERVA



M 1 7 2 4 0 2 1 2 1 1 3

PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA



M 1 7 2 4 0 2 1 2 1 1 5

PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA