



Codice del candidato:

Državni izpitni center



PRIMA SESSIONE D'ESAME

MATEMATICA

≡ Prova d'esame 2 ≡

Livello superiore

Sabato, 2 giugno 2007 / 90 minuti

Al candidato è consentito l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice tascabile senza interfaccia grafica e senza possibilità di calcolo algebrico o simbolico, nonché del compasso, di due squadretti e di un righello. Al candidato va consegnato il fascicolo della prova, due schede di valutazione e due fogli per la minuta.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete attentamente le seguenti indicazioni. Non tralasciate nulla!

Non voltate pagina e non iniziate a risolvere gli esercizi prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice nello spazio apposito su questa pagina in alto a destra e sulle schede di valutazione.

Questa prova d'esame comprende 3 esercizi strutturati. Risolvete tutti gli esercizi. Gli esercizi vanno risolti nello spazio sotto il testo di ciascuno di essi e nella pagina che lo segue. Le pagine 10, 11, e 12 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. **I valutatori non terranno in considerazione le risoluzioni contenute nei fogli per la minuta.**

È d'obbligo l'uso della penna stilografica o a sfera. **Se ritenete di aver sbagliato, tracciate una barra sulle soluzioni errate.** Disegnate i grafici delle funzioni con la matita. Fate attenzione che le risoluzioni siano scritte in modo chiaro e leggibile. Nelle risoluzioni mettete ben in evidenza il procedimento, i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

A pagina 2 trovate un elenco delle formule più impegnative che non è necessario sapere a memoria. Forse qualcuna di esse potrà esservi utile.

Le soluzioni degli esercizi della prova d'esame non vanno scritte a matita. Se avete risolto l'esercizio proponendo più versioni, indicate in modo inequivocabile quella che il valutatore deve correggere.

Leggete bene ogni esercizio e risolvete la prova con attenzione. Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità.

Il punteggio massimo conseguibile è di 40 punti.

Buon lavoro.

Questa prova d'esame ha 12 pagine, di queste 3 sono di riserva.

Formule

- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$
- Raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta ad un triangolo: $R = \frac{abc}{4A}$, $r = \frac{A}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Formule di bisezione:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
- Funzioni trigonometriche relative al triplo di un angolo:
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- Teoremi di addizione:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
- Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
, $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$
- Formule di Werner o della scomposizione del prodotto:
 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$;
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- Distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by - c = 0$:

$$d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
- Area del triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$
- Ellisse: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $a > b$
- Iperbole: $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; a è il semiasse reale.
- Parabola: $y^2 = 2px$, fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- Integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C$

VOLTATE PAGINA

01. La circonferenza K passa attraverso i punti $A(-4, 0)$ e $B(2, 0)$, il suo centro appartiene alla retta $y = -4x$.

- a) Scrivete le coordinate del centro, il raggio e l'equazione della circonferenza K . Aiutatevi con lo schizzo. (4 punti)
- b) Determinate tutti i punti $C(x, y)$ della circonferenza K per i quali l'area del triangolo ABC sia uguale a 3. (4 punti)
- c) Alla circonferenza K sia circoscritto il trapezio $ABEF$ di base AB . Il vertice E sia nel primo quadrante e appartenga alla retta $y = x$. Scrivete le coordinate dei vertici E e F e calcolate inoltre l'area del trapezio $ABEF$. (5 punti)
- d) Tra tutti i triangoli inscritti nella circonferenza K e aventi il lato comune AB , scegliete quello di area massima. Scrivete le coordinate del suo vertice C' . (2 punti)

02. Risolvete i seguenti tre esercizi con le successioni aritmetiche.

- a) Calcolate x e y , se sono 9, x , y e 1 i termini successivi di una successione aritmetica.
(3 punti)
- b) Calcolate n , se vale che $\log 3 + \log 9 + \log 27 + \dots + \log 3^{99} = \log 3^n$.
(4 punti)
- c) La somma dei primi cinque termini di una serie aritmetica è 25. Tra tutte le successioni possibili, scegliete quella, per la quale vale che la somma dei quadrati dei primi tre membri sia minima e scrivete i suoi primi cinque membri.
(6 punti)

03. È data la funzione $f(x) = \cos x$.

a) Calcolate gli zeri della funzione $f_1(x) = f(2x) + 1$.

(2 punti)

b) Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la funzione $f_2(x) = \frac{1}{4(f(x))^2 - 1}$ non è definita?

(3 punti)

c) Scegliete i numeri $a > 0$ e b in modo che l'intervallo $[-4, 2]$ sia l'insieme immagine della funzione $f_3(x) = af(x) + b$.

(2 punti)

d) Risolvete l'equazione $2(f(x))^2 + f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2f(2x)$.

(5 punti)

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA

PAGINA DI RISERVA