



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



SESSIONE PRIMAVERILE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**  
≡ Prova d'esame 2 ≡

**Sabato, 9 giugno 2018 / 90 minuti**

*Materiali e sussidi consentiti:*

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, della calcolatrice, nonché del compasso, di due squadrette e di un righello.*

*Al candidato vengono consegnati due fogli per la minuta e una scheda di valutazione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra e sulla scheda di valutazione. Scrivete il vostro numero di codice anche sui fogli della minuta.

Nella prova dovrete risolvere tre dei 4 quesiti strutturati proposti. I primi due quesiti sono obbligatori, mentre potete scegliere tra gli altri due quello che intendete risolvere. Si possono conseguire al massimo 40 punti. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3.

Indicate con una "x" nella tabella quale dei due quesiti avete scelto. Senza tale indicazione il valutatore procederà alla correzione del primo quesito che avrete risolto.

3	4

Scrivete le vostre risposte **all'interno della prova** sotto il testo dei quesiti e nelle pagine successive, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine dalla 12 alla 16 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali esercizi avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 16 pagine, delle quali 5 di riserva.*





## Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n$  è un numero naturale dispari

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , se  $n \in \mathbb{N}$

Teoremi di Euclide e dell'altezza di un triangolo rettangolo:  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$

Raggio della circonferenza circoscritta e raggio della circonferenza inscritta a un triangolo:  $R = \frac{abc}{4A}$ ,

$$r = \frac{A}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Formule di bisezione:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Teoremi di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formule di prostaferesi o di fattorizzazione:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Formule del Werner o della scomposizione del prodotto:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $ax + by - c = 0$ :  $d(T_0, p) = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Area del triangolo di vertici  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ :

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Ellisse:  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ , se  $a > b$

Iperbole:  $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola:  $y^2 = 2px$ , fuoco  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Compositum di funzioni:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Formula di Bernoulli:  $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Integrale:  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$



Il quesito strutturato 1 è obbligatorio.

1. È data la funzione  $f$ , per la quale vale che  $f(2x-1) = \frac{x-1}{x^2+x}$  per qualsiasi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ .

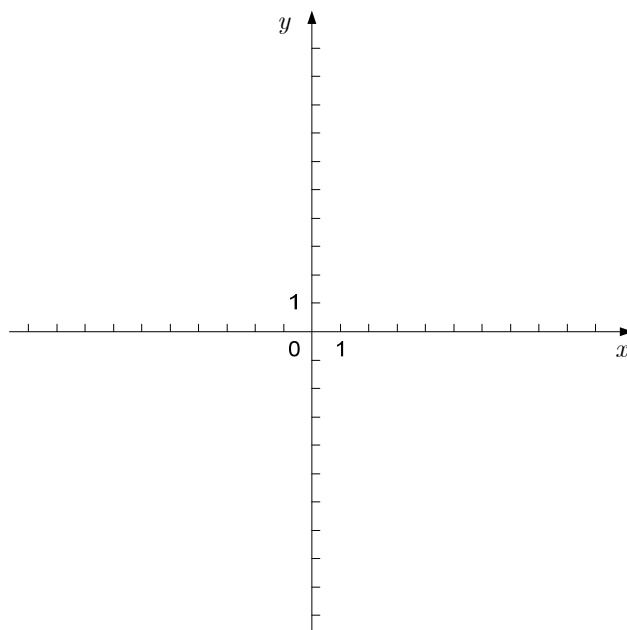
1.1. Dimostrate che possiamo esprimere la funzione  $f$  con la dipendenza  $f(x) = \frac{2x-2}{x^2+4x+3}$ .

(2 punti)

1.2. Calcolate per quali valori della variabile  $x$  la funzione  $f$  ha dei punti stazionari.

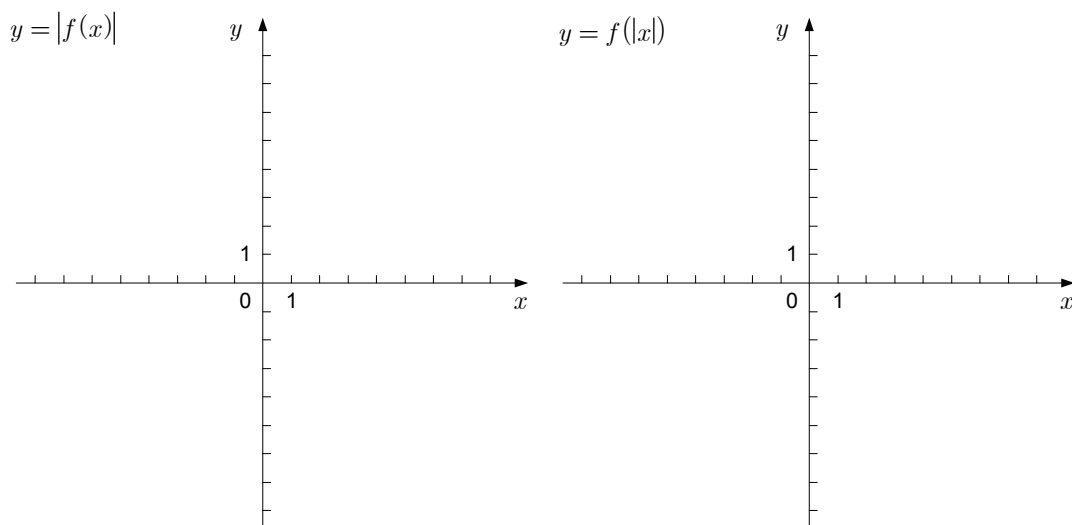
(4 punti)

1.3. Determinate tutti gli zeri e i poli della funzione  $f$ . Tracciate il grafico della funzione  $f$  e scrivete l'equazione del suo asintoto orizzontale.



(6 punti)

1.4. Tracciate le curve espresse dalle equazioni  $y = |f(x)|$  e  $y = f(|x|)$ .



(2 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 8 1 4 0 2 1 2 1 0 5

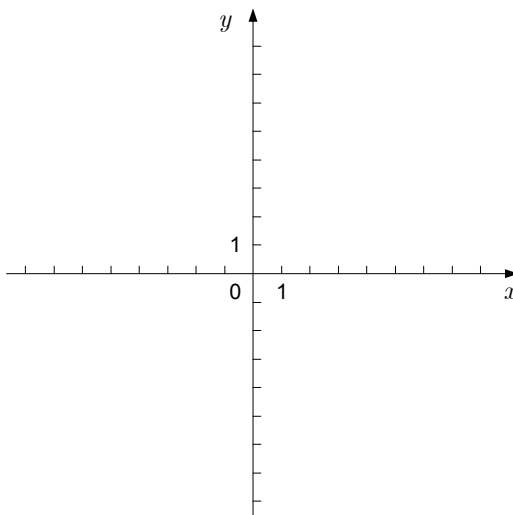


**Il quesito strutturato 2 è obbligatorio.**

2. Risolvete i quesiti relativi agli insiemi di punti nel piano.

2.1. Rappresentate nel sistema di coordinate l'insieme dei punti

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (|x - 3| < 2) \wedge (y > -1) \wedge (x + y < 6)\}.$$



(4 punti)

2.2. Calcolate l'area della parte di piano

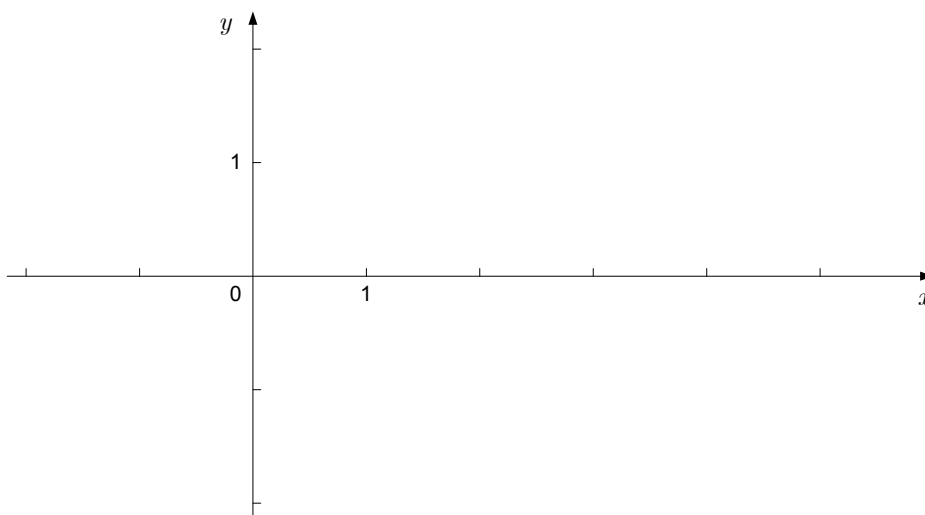
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (|x - 3| \leq 2) \wedge (y \geq -1) \wedge (x + y \leq 2018)\}.$$

(3 punti)

2.3. Rappresentate nel sistema di coordinate gli insiemi di punti

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (x - 1)^2 + y^2 = 2^{-2}\} \text{ e}$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (x - 2)^2 + y^2 = 2^{-3}\}.$$



(2 punti)

2.4. Per ogni numero naturale  $n$  è  $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (x - n)^2 + y^2 \leq 2^{-n-1}\}$ . Calcolate l'area della parte di piano  $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_n \cup \dots$ .

(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 8 1 4 0 2 1 2 1 0 7



Il quesito strutturato 3 è a scelta. Potete scegliere tra i quesiti strutturati 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina della prova d'esame.

3. Una successione reale è data in forma recursiva:  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ ,  $a_1 = 2$  e  $a_2 = 3$ .

3.1. Dimostrate per induzione matematica che per un qualsiasi numero naturale  $n$  vale che  $a_n = n + 1$ .

(3 punti)

3.2. Calcolate la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{a_n}}{3^{a_n}}$ .

(4 punti)

3.3. Calcolate i limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{a_n x}, \text{ per } x \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{a_n x}, \text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

(6 punti)



Non scrivete nel campo grigio.



M 1 8 1 4 0 2 1 2 1 0 9



**Il quesito strutturato 4 è a scelta. Potete scegliere tra i quesiti strutturati 3 e 4. Indicate la vostra scelta nella prima pagina della prova d'esame.**

4. In un'aula ci sono 40 sedie suddivise in 5 file in modo che ogni fila abbia lo stesso numero di sedie. Sulle sedie si mettono seduti a caso 8 studenti di matematica: Maia, Eva, Ela, Ian, Tim, Nico, Luca e Franco.

4.1. Calcolate la probabilità degli eventi:

$A$  – la prima fila rimane vuota,

$B$  – nella prima fila sono occupate esattamente 3 sedie,

$C$  – tutti gli studenti si sono seduti nella stessa fila.

(7 punti)

Durante i pomeriggi Maia, Eva, Ela, Ian, Tim, Nico, Luca e Franco si dedicano a giochi di società. Ognuno di loro tira esattamente una volta un dado da gioco non truccato.

4.2. Calcolate la probabilità degli eventi:

$D$  – a nessuno esce il sei,

$E$  – esattamente a due esce il sei,

$F$  – almeno a due esce il sei e

$H$  – il sei esce solo a Maia e a Franco.

(6 punti)

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 8 1 4 0 2 1 2 1 1 1



PAGINA DI RISERVA



M 1 8 1 4 0 2 1 2 1 1 3

PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA

Non scrivete nel campo grigio.



M 1 8 1 4 0 2 1 2 1 1 5

PAGINA DI RISERVA



PAGINA DI RISERVA