



Codice del candidato:

Državni izpitni center



SESSIONE PRIMAVERILE

Livello superiore
MATEMATICA

≡ Prova d'esame 2 ≡

- B) Quesiti strutturati brevi
C) Quesiti strutturati

Sabato, 5 giugno 2021 / 90 minuti (45 + 45)

Materiali e sussidi consentiti:

Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice. Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.

MATURITÀ GENERALE

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.

Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.

**Formule**

(Somma e differenza di potenze a esponente naturale) Per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi numero naturale n vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(Teorema di Euclide e dell'altezza) Il triangolo rettangolo ha i cateti a e b e l'ipotenusa c . L'altezza all'ipotenusa è h_c , la proiezione ortogonale del cateto a all'ipotenusa è a_1 , la proiezione ortogonale del cateto b all'ipotenusa è b_1 . Quindi vale $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c^2 = a_1b_1$.

(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$, l'area è A , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato è r e il raggio della circonferenza circoscritta la triangolo dato è R . Quindi è $r = \frac{A}{p}$ e

$$R = \frac{abc}{4A}$$

(Formula di Erone) Il triangolo ha i lati a, b e c , il semiperimetro è $p = \frac{a+b+c}{2}$. Allora la sua area è

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(Area del triangolo) Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici A, B e C è uguale a $A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$.

(Sfera) L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio r sono $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(Distanza di un punto da una retta) Siano $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e dove a e b non siano uguali a 0. La distanza del punto $T_0(x_0, y_0)$ dalla retta p , espressa dall'equazione $ax + by - c = 0$, è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(Logaritmo) Siano $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Quindi per ogni $x > 0$ vale $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(Teoremi di addizione) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$, per i quali $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$ e

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{vale } \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

(Formule di bisezione) Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Per qualsiasi $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$ vale $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(Formule di prostaferesi) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$



(Formule del Werner) Per qualsiasi $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

(Ellisse) L'ellisse nel piano ha i semiassi a e b ($a > b$), la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Iperbole) L'iperbole nel piano ha il semiasse reale a e il semiasse immaginario b , la sua eccentricità lineare è e , la sua eccentricità numerica è ε . Quindi vale $e^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

(Parabola) Parabola nel piano di equazione $y^2 = 2px$ ha il fuoco in $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, l'equazione della retta direttrice della parabola è $x = -\frac{p}{2}$.

(Successione aritmetica) La somma dei primi n termini della successione aritmetica (a_n) è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(Successione geometrica) La somma dei primi n termini della successione geometrica (a_n) di

ragione $q \in \mathbb{R}$ è $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, se $q \neq 1$, e $S_n = na_1$, se $q = 1$.

(Limiti) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Integrale indefinito) Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

(Integrazione per partes) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

(Volume del solido di rotazione) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione f , l'asse delle ascisse e le rette

$x = a$ e $x = b$, attorno all'asse delle ascisse di 360° , è $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Formula di Bernouilli) Sia p la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento A . La probabilità che l'evento A in n prove successive si realizzi k volte è $P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

A large empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



M 2 1 1 4 0 2 1 2 1 0 7

Foglio per la minuta



Foglio per la minuta

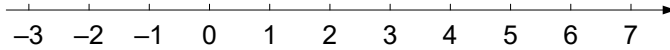
A large, empty rectangular box intended for taking minutes.

**B) QUESITI STRUTTURATI BREVI**

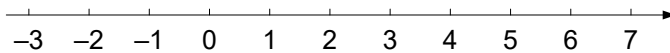
1. Sono dati gli insiemi $A = (-1, 3]$ e $B = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$.

Rappresentate gli insiemi A e B sulla retta numerica.

A



B



Ogni insieme nella colonna di sinistra della tabella è uguale a uno tra gli intervalli nella colonna di destra. Gli intervalli nella colonna di destra sono indicati con i numeri da 1 a 5.

Negli spazi appositi della tabella, riportate il numero dell'intervallo corrispondente a ciascuno degli insiemi indicati nella colonna di sinistra (la prima riga è stata già completata correttamente).

B	5
$A \cap B$	
$A \cup B$	
$A \setminus B$	

1: $[2, 3]$

2: $[2, \infty)$

3: $(-1, 2)$

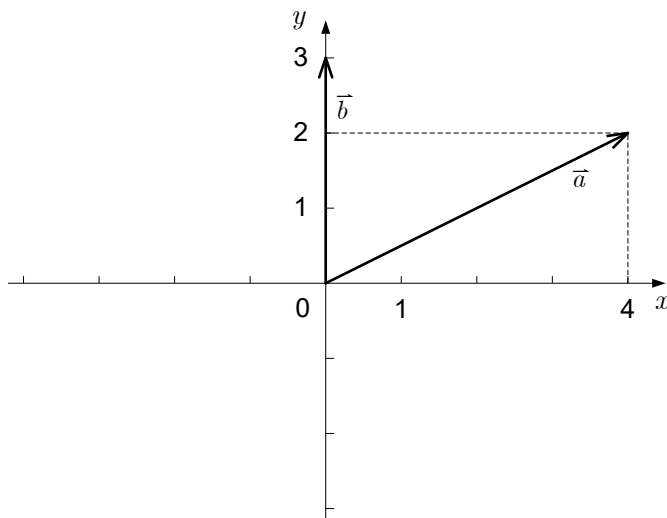
4: $(-\infty, 3]$

5: $(-\infty, 2)$

(5 punti)



2. Nel piano, corredato con un sistema di coordinate, sono disegnati due vettori \vec{a} e \vec{b} . Disegnate il vettore $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$. Quali sono le lunghezze dei vettori \vec{a} e \vec{b} ? Quanto misura l'angolo φ tra \vec{a} e \vec{b} ? Arrotondate il risultato al centesimo di grado.

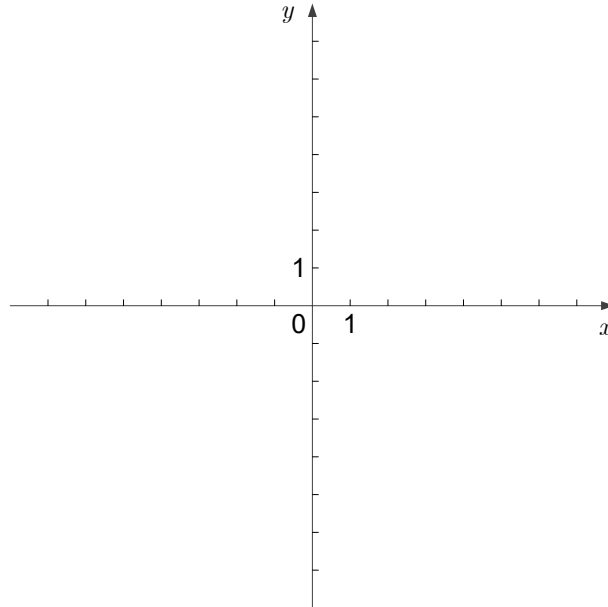


(8 punti)



3. È data la funzione f con la dipendenza $f(x) = 3 \cdot 2^x - 1$.

Tracciate nel piano, corredato con un sistema di coordinate, il grafico della funzione f e scrivete l'equazione dell'asintoto del grafico.



Se proiettiamo il grafico della funzione f attraverso la bisettrice dei quadranti dispari otteniamo il grafico della funzione g . Scrivete la dipendenza della funzione g .

(6 punti)



4. In un contenitore ci sono 18 palline. Metà di esse è di colore bianco, un terzo di colore azzurro, le rimanenti sono rosse.

Scegliamo a caso una pallina. Qual è la probabilità dell'evento A , che la pallina scelta sia rossa?

Scegliamo a caso due palline. Qual è la probabilità dell'evento B , che ambedue le palline siano bianche?

Scegliamo a caso tre palline. Qual è la probabilità dell'evento C , che le tre palline scelte siano di diverso colore?

(8 punti)



5. Risolvete l'equazione $\cos x + \cos 2x = 0$.

(6 punti)



6. Sono date le funzioni f e g con le dipendenze $f(x) = 2x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$.

Dimostrate che i grafici delle funzioni f e g si intersecano solo in un punto di ascissa $x = 1$.

Calcolate l'angolo con il quale si intersecano i grafici delle funzioni f e g . Arrotondate l'ampiezza dell'angolo al primo di grado.

(7 punti)

**C) QUESITI STRUTTURATI**

1. Risolvete i seguenti quesiti, riguardanti il calcolo dell'interesse composto. Arrotondate i risultati al centesimo di euro.

In tutti i quesiti il calcolo dell'interesse composto prevede l'accredito annuale degli interessi, con il tasso d'interesse annuo dell' 1,5 %.

- 1.1. All'inizio dell'anno 2000 avevamo su un conto bancario 580 €. Quanto avremo sul conto 11 anni più tardi, se nel frattempo non sono state effettuate né operazioni di prelievo né operazioni di deposito?

(3 punti)

- 1.2. All'inizio di ogni anno, per cinque anni di seguito, abbiamo depositato in banca 180 €. A quanto ammontava l'importo totale di risparmio sei anni dopo aver effettuato l'ultimo deposito?

(3 punti)

- 1.3. All'inizio dell'anno 2009 abbiamo chiesto un prestito dell'ammontare di 18000 €. Lo abbiamo estinto con dodici rate annuali uguali, la prima è stata versata alla fine dell'anno 2009. Quant' era l'importo della rata annuale?

(4 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

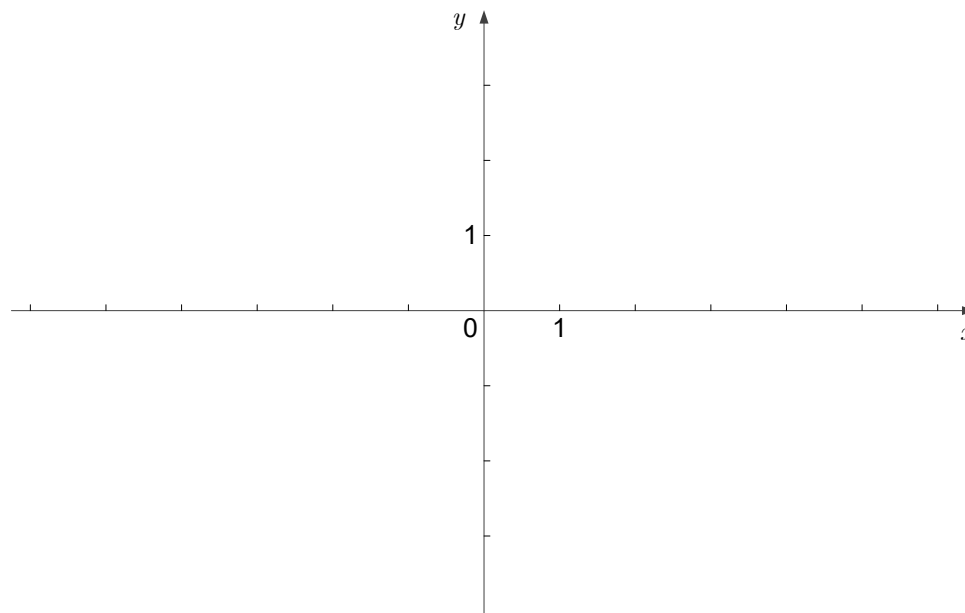


A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. This area is intended for the user to provide answers or additional information.



2. È data la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la dipendenza $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$ e la funzione f , derivabile tre volte, per la quale vale che $f(1) = 2021$, $f'(1) = 0$ e $f''(1) = -2021$.

2.1. Calcolate $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. Dimostrate che la funzione g è decrescente e tracciate il suo grafico.



(5 punti)

2.2. Dalla famiglia di funzioni $\{G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; G'(x) = g'(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}$ determinate quella funzione per la quale vale che $G(\ln 3) = 1$.

(3 punti)

2.3. La funzione f ha nel punto $x = 1$ un minimo relativo? Argomentate la risposta.

(2 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten input.



Pagina di riserva