



Codice del candidato:

**Državni izpitni center**



SESSIONE PRIMAVERILE

**Livello superiore**  
**MATEMATICA**

≡≡ Prova d'esame 2 ≡≡

- B) Quesiti strutturati brevi  
C) Quesiti strutturati

**Sabato, 4 giugno 2022 / 90 minuti (45 + 45)**

*Materiali e sussidi consentiti:*

*Al candidato sono consentiti l'uso della penna stilografica o della penna a sfera, della matita, della gomma, degli strumenti geometrici (un compasso e un righello, anche una squadretta) e la calcolatrice. Il fascicolo contiene l'allegato con le formule e i due fogli della minuta, che il candidato deve staccare con attenzione.*

**MATURITÀ GENERALE**

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

**Leggete con attenzione le seguenti indicazioni.**

**Non aprite la prova d'esame e non iniziate a svolgerla prima del via dell'insegnante preposto.**

Incollate o scrivete il vostro numero di codice negli spazi appositi su questa pagina in alto a destra.

La prova d'esame si compone di due parti, denominate B e C. Il tempo a disposizione per l'esecuzione dell'intera prova è di 90 minuti: vi consigliamo di dedicare 45 minuti alla risoluzione della parte B, e 45 minuti a quella della parte C.

La parte B della prova d'esame contiene 6 quesiti strutturati brevi; la parte C della prova contiene 2 quesiti strutturati. Il punteggio massimo che potete conseguire è di 60 punti, di cui 40 nella parte B e 20 nella parte C. Il punteggio conseguibile in ciascun quesito viene di volta in volta espressamente indicato. Per risolvere i quesiti potete fare uso dell'elenco di formule che trovate a pagina 3 e 4.

Scrivete le vostre risposte all'interno della prova, **nei riquadri appositamente previsti**, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera. Disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta. Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti. Le pagine 15 e 20 sono di riserva e vanno usate solo in caso di carenza di spazio. Qualora le doveste utilizzare, non dimenticate di indicare chiaramente quali quesiti avete risolto su di esse. Utilizzate i fogli della minuta solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Nel caso in cui un quesito sia stato risolto in più modi, deve essere indicata con chiarezza la soluzione da valutare.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Vi auguriamo buon lavoro.

*La prova si compone di 20 pagine, di cui 2 di riserva.*



**Formule**

**(Somma e differenza di potenze a esponente naturale)** Per qualsiasi  $a, b \in \mathbb{R}$  e per qualsiasi numero naturale  $n$  vale

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

**(Teorema di Euclide e dell'altezza)** Il triangolo rettangolo ha i cateti  $a$  e  $b$  e l'ipotenusa  $c$ . L'altezza all'ipotenusa è  $h_c$ , la proiezione ortogonale del cateto  $a$  all'ipotenusa è  $a_1$ , la proiezione ortogonale del cateto  $b$  all'ipotenusa è  $b_1$ . Quindi vale  $a^2 = ca_1$ ,  $b^2 = cb_1$ ,  $h_c^2 = a_1b_1$ .

**(Raggio della circonferenza circoscritta e inscritta a un triangolo)** Il triangolo ha i lati  $a, b$  e  $c$ , il semiperimetro è  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , l'area è  $A$ , l'area della circonferenza inscritta al triangolo dato

è  $r$  e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo dato è  $R$ . Quindi è  $r = \frac{A}{p}$  e

$$R = \frac{abc}{4A}.$$

**(Formula di Erone)** Il triangolo ha i lati  $a, b$  e  $c$ , il semiperimetro è  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Allora la sua area è

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**(Area del triangolo)** Siano  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  tre punti nel piano. L'area del triangolo di vertici  $A, B$  e  $C$  è uguale a

$$A = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

**(Sfera)** L'area della superficie totale e il volume di una sfera di raggio  $r$  sono  $S = 4\pi r^2$ ,  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ .

**(Distanza di un punto da una retta)** Siano  $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  e dove  $a$  e  $b$  non siano uguali a 0. La distanza del punto  $T_0(x_0, y_0)$  dalla retta  $p$ , espressa dall'equazione  $ax + by - c = 0$ , è

$$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**(Logaritmo)** Siano  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ . Quindi per ogni  $x > 0$  vale  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .

**(Teoremi di addizione)** Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \right\}$ , per i quali  $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$  per qualsiasi  $k \in \mathbb{Z}$  e

$$\tan x \tan y \neq -1, \quad \text{vale} \quad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

**(Formule di bisezione)** Per qualsiasi  $x \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Per qualsiasi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + \pi \cdot 2k; k \in \mathbb{Z} \}$  vale  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ .

**(Formule di prostaferesi)** Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$



**(Formule del Werner)** Per qualsiasi  $x, y \in \mathbb{R}$  vale

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

**(Ellisse)** L'ellisse nel piano ha i semiassi  $a$  e  $b$  ( $a > b$ ), la sua eccentricità lineare è  $e$ , la sua eccentricità numerica è  $\varepsilon$ . Quindi vale  $e^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Iperbole)** L'iperbole nel piano ha il semiasse reale  $a$  e il semiasse immaginario  $b$ , la sua eccentricità lineare è  $e$ , la sua eccentricità numerica è  $\varepsilon$ . Quindi vale  $e^2 = a^2 + b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .

**(Parabola)** Parabola nel piano di equazione  $y^2 = 2px$  ha il fuoco in  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , l'equazione della retta direttrice della parabola è  $x = -\frac{p}{2}$ .

**(Successione aritmetica)** La somma dei primi  $n$  termini della successione aritmetica  $(a_n)$  è

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

**(Successione geometrica)** La somma dei primi  $n$  termini della successione geometrica  $(a_n)$  di

ragione  $q \in \mathbb{R}$  è  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ , se  $q \neq 1$ , e  $S_n = na_1$ , se  $q = 1$ .

**(Limiti)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**(Integrale indefinito)** Sia  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Allora per ogni  $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

**(Integrazione per partes)** Sia  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili. Quindi vale

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'.$$

**(Volume del solido di rotazione)** Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Il volume del corpo che si forma ruotando la figura delimitata dal grafico della funzione  $f$ , l'asse delle ascisse e le rette

$x = a$  e  $x = b$ , attorno all'asse delle ascisse di  $360^\circ$ , è  $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ .

**(Formola di Bernouilli)** Sia  $p$  la probabilità che in una data prova si realizzi l'evento  $A$ . La probabilità che l'evento  $A$  in  $n$  prove successive si realizzi  $k$  volte è

$$P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**Foglio per la minuta**



**Foglio per la minuta**

A large empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



### Foglio per la minuta



**Foglio per la minuta**

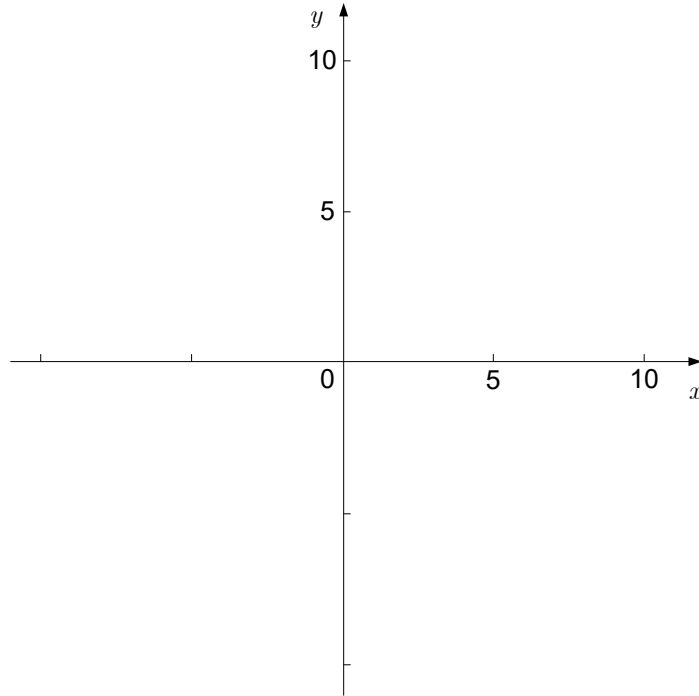
A large empty rectangular box intended for taking minutes.

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



**B) QUESITI STRUTTURATI BREVI**

1. Nel sistema di coordinate dato, indicate i punti  $A(0, 5)$  e  $B(10, 0)$ , e tracciate la retta che passi per i due punti. Scrivete l'equazione di tale retta e calcolate l'angolo  $\sphericalangle ABO$  ( $O$  è l'origine del sistema di coordinate). Arrotondate il risultato al primo di grado.



(6 punti)

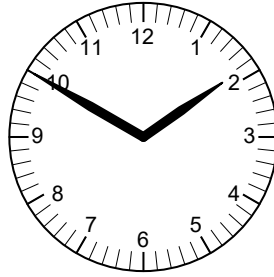


2. È dato il triangolo  $ABC$  di dati  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$  e  $a = 7$  cm. Calcolate con l'esattezza al millimetro la lunghezza del lato  $b$ . Calcolate poi l'area del triangolo con l'esattezza al  $\text{cm}^2$ .

(7 punti)



3. In un orologio la lancetta dei minuti è lunga 9 cm, quella delle ore è lunga 6 cm. Scrivete le risposte alle tre domande sottostanti.



Domanda	Risposta
Quale percorso fa la punta della lancetta dei minuti in un'ora?	
Quale percorso fa la punta della lancetta delle ore in un'ora?	
Quale angolo (minore di $180^\circ$ ) racchiudono le due lancette alle ore 13 e 50 minuti? Argomentate la risposta.	

(7 punti)



4. Sono dati i vettori  $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 4)$  e  $\vec{c} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ .

Calcolate i vettori  $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b}$  e  $\vec{e} = \vec{a} + 2\vec{c}$ .

I vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono ortogonali?

I vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{c}$  sono paralleli?

I vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  formano una base nello spazio?

Argomentate tutte e tre le risposte.

(5 punti)



5. Risolvete l'equazione  $\sin^2 x - \sin x = \cos^2 x$ .

(7 punti)

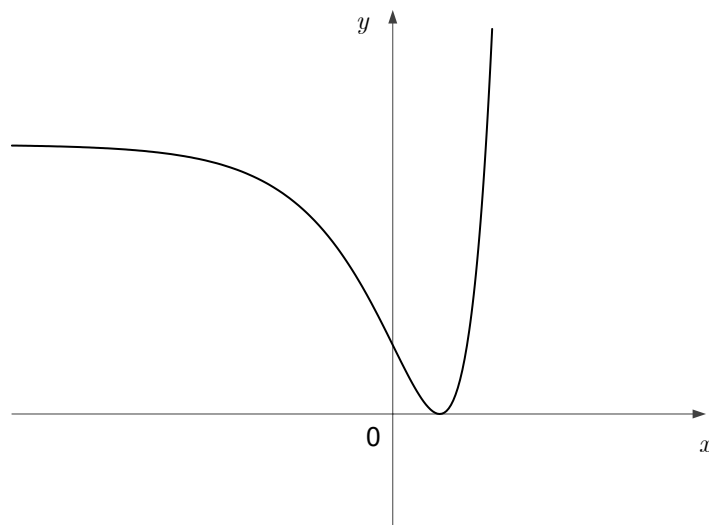


6. In una successione geometrica il terzo termine è uguale a 40, il sesto a 320.  
Il numero 81900 è un termine di tale successione? Argomentate la risposta.  
Quanti termini iniziali di tale successione dobbiamo sommare per ottenere come somma 20470?  
(8 punti)



**C) QUESITI STRUTTURATI**

1. La figura mostra il grafico della funzione  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con la dipendenza  $h(x) = (2 - e^x)^2$ .



- 1.1. Calcolate lo zero, il termine noto,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$  e scrivete l'equazione dell'asintoto orizzontale. Indicate nella figura i due punti  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .
- 1.2. Calcolate l'ascissa dell'intersezione del grafico della funzione  $h$  con la retta di equazione  $y = 4$ .
- 1.3. Calcolate e scrivete l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $h$  nel punto di ascissa 0.

(5 punti)

(2 punti)

(3 punti)



Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. This area is intended for the user to provide answers or additional information.



2. È dato l'insieme dei punti nel piano  $\{A_n(n, 2n - 2); n \in \mathbb{N}\}$ . Indichiamo l'origine del sistema di coordinate con  $O$ .
- 2.1. Calcolate la distanza tra i punti  $A_1$  e  $A_2$ . (3 punti)
- 2.2. Calcolate la lunghezza dell'altezza al lato  $A_1A_2$  nel triangolo  $A_1A_2O$ . (2 punti)
- 2.3. Quanti punti dell'insieme  $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$  giacciono nel cerchio di centro  $S(100, 100)$  e raggio  $r = 100$ ? (5 punti)

Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio. Non scrivete nel campo grigio.



A large, empty rectangular box with a thin black border occupies the central portion of the page, intended for handwritten or printed content.



# Pagina di riserva