Šifra kandidata:
A jelölt kódszáma:

Državni izpitni center

M 1 9 2 4 0 2 1 2 M

JESENSKI IZPITNI ROK
ŐSZI VIZSGAIDŐSZAK

Višja raven
Emelt szint

MATEMATIKA

Izpitna pola 2
2. feladatlap

Ponedeljek, 26. avgust 2019 / 90 minut
2019. augusztus 26., hétfő / 90 perc

Dovoljeno gradivo in pripomočki: Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo). Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

Engedélyezett segédeszközök:
A jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát, radírt, számológépet, rajzeszközöket (körzőt, két háromszöget, esetleg vonalzót) hoz magával. A jelölt kap egy értékelő lapot, a vázlatkészítéshez pedig két pótlapot.

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

Ta pola ima 20 strani, od tega 4 rezervne in 3 prazne.
A feladatlap 20 oldalas, ebből 4 tartalék és 3 üres.

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.
Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	4.

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 15 do 18 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót!
Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg azt a felügyelő tanár nem engedélyezi!

Ragassza vagy írja be kódszámát a feladatlap első oldalának jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelő lapra! Kódszámát a pótlapokra is írja rá!

A feladatlap 4 strukturált feladatot tartalmaz. Az első két feladat megoldása kötelező, a másik kettőből válasszon ki egyet, és azt oldja meg. Összesen 40 pontot érhet el. A feladatlapban a feladatok mellett feltüntettük az elérhető pontszámot is. A feladatok megoldásakor használhatja a 4. oldalon található standard képletgyűjteményt.

A táblázatban "x"-szel jelölje meg, hogy melyik feladatot értékeljék. Ha ezt nem teszi meg, a megoldott feladatok közül az elsőt értékelik.

3.	*4.*

Válaszait töltőtollal vagy golyóstollal írja a ***feladatlap*** *erre kijelölt helyére! Rajzoláshoz használhat ceruzát is. Ha tévedett, a leírtat húzza át, majd válaszát írja le újra! Az olvashatatlan megoldásokat és a nem egyértelmű javításokat 0 ponttal értékeljük. A 15–18. oldal tartalék. Ide csak akkor írjon, ha másutt már nincs hely! Egyértelműen jelölje meg, hogy melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon! A pótlapokra készített vázlatokat az értékelés során nem veszik figyelembe.*

A válasznak tartalmazniuk kell a megoldásig vezető műveletsort, az összes köztes számítással és következtetéssel együtt. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljék!

Bízzon önmagában és képességeiben! Eredményes munkát kívánunk!

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, če je $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n, p, k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integral: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Képletek

$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* n *páratlan természetes szám*

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* $n \in \mathbb{N}$

A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele: $a^2 = ca_1,\ b^2 = cb_1,\ v_c^2 = a_1b_1$

A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara: $R = \frac{abc}{4S},\ r = \frac{S}{s},\ s = \frac{a+b+c}{2}$

A félszögek szögfüggvényei:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2},\ \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Addíciós tételek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$

Összegek szorzattá történő átalakításának képletei:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

A szorzatok összeggé történő átalakításának képletei:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

A $T_0(x_0, y_0)$ *pont távolsága az* $ax + by - c = 0$ *egyenletű egyenestől:* $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Az $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$ *csúcsú háromszög területe:*

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Ellipszis: $e^2 = a^2 - b^2,\ \varepsilon = \frac{e}{a}$, *ha* $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ *a parabola fókuszpontja*

Összetett (kompozítum) függvény: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoulli-képlet: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integrál: $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Prazna stran

Üres oldal

Naloga 1 je obvezna. / *Az 1. feladat kötelező.*

1. Nalogo rešite brez uporabe računala.

   Dana je funkcija $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=\tan x-\sin(2x)$.

   A feladatot számológép használata nélkül oldja meg!

   Adott az $f(x)=\tan x-\sin(2x)$ hozzárendelési szabályú $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ függvény.

1.1. Dokažite, da je f periodična funkcija s periodo π. Izračunajte vse ničle funkcije f.

Bizonyítsa be, hogy az f függvény periodikus függvény periódusa π. Számítsa ki az f függvény minden zérushelyét!

(5 točk/pont)

1.2. V točki $T\left(\frac{\pi}{3},\ y_0\right)$ položimo tangento na graf funkcije f. Izračunajte njeno enačbo.

Az f függvény grafikonjához a $T\left(\frac{\pi}{3},\ y_0\right)$ pontból érintő egyenest állítunk. Számítsa ki az érintő egyenes egyenletét!

(4 točke/pont)

1.3. Poiščite tisto funkcijo $F:\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, za katero velja, da je $F'=f$ in $F(\pi)=1$.

Írja fel azt az $F:\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre fennáll, hogy $F'=f$ és $F(\pi)=1$.

(4 točke/pont)

Naloga 2 je obvezna. / *Az 2. feladat kötelező.*

2. Dan je enakokraki trapez $ABCD$ s podatki $a=|AB|=20$ cm, $b=|BC|=10$ cm, $c=|CD|=8$ cm, $d=|AD|=10$ cm.

   Adott az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz a következő adatokkal: $a=|AB|=20$ cm, $b=|BC|=10$ cm, $c=|CD|=8$ cm, $d=|AD|=10$ cm.

2.1. Dokažite, da meri višina trapeza 8 cm. Izračunajte prostornino pokončne prizme z višino 3 cm, ki ima za osnovno ploskev trapez $ABCD$.

Bizonyítsa be, hogy a trapéz magassága 8 cm *! Számítsa ki annak az egyenes hasábnak a térfogatát, amelynek alaplapja az $ABCD$ trapéz, magassága pedig* 3 cm *!*

(4 točke/pont)

2.2. Izračunajte ploščino trapeza $A_1B_1C_1D_1$, ki ga dobimo s središčnim raztegom trapeza $ABCD$. Razteg ima središče v točki A in faktor $\sqrt{2}$.

Számítsa ki annak az $A_1B_1C_1D_1$ trapéznak a területét, amelyet az $ABCD$ trapéz középpontos nyújtásával kapunk! A nyújtás középpontja az A pont, a nyújtási tényező pedig $\sqrt{2}$.

(2 točki/pont)

2.3. Trapez $ABCD$ zavrtimo okrog njegove simetrale za $180°$. Izračunajte površino in prostornino nastale vrtenine.

Az $ABCD$ trapézt megforgatjuk $180°$ *-kal a szimmetriatengelye körül. Számítsa ki az így keletkezett forgástest felszínét és térfogatát!*

(8 točk/pont)

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole. /
A 3. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

3. Naj bosta $a,\ b \in \mathbb{N}$ in naj bodo dana naravna števila

Legyenek $a,\ b \in \mathbb{N}$, továbbá adottak a következő természetes számok is:

$n_1 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^b \cdot 7^b$,
$n_2 = 2^b \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 7^b$,
$n_3 = 2^b \cdot 3^b \cdot 5^a \cdot 7^b$,
$n_4 = 2^b \cdot 3^b \cdot 5^b \cdot 7^a$.

3.1. Za dana para števil a in b razvrstite števila $n_1,\ n_2,\ n_3$ in n_4 po velikosti od najmanjšega do največjega.

A megadott a és b számpárra rendezze nagyság szerint az $n_1,\ n_2,\ n_3$ és n_4 számokat a legkisebbtől a legnagyobbig!

$a = 2019$ in / *és* $b = 2018$: _______ $<$ _______ $<$ _______ $<$ _______

$a = 2018$ in / *és* $b = 2019$: _______ $<$ _______ $<$ _______ $<$ _______

(4 točke/pont)

3.2. Dokažite, da števili n_1 in n_2 nista niti praštevili niti tuji si števili.

Bizonyítsa be, hogy az n_1 és n_2 számok sem nem prímszámok, sem nem relatív prímek!

(2 točki/pont)

3.3. V odvisnosti od parametrov a in b (za primere $a > b,\ a = b$ ali $a < b$) zapišite število $\frac{n_1}{n_2}$ kot okrajšan ulomek.

Az a és b paraméterek ($a > b,\ a = b$ vagy $a < b$ esetén) függvényében írja fel az $\frac{n_1}{n_2}$ számot tovább nem egyszerűsíthető tört alakban!

(3 točke/pont)

3.4. V odvisnosti od a in b izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil $n_1,\ n_2,\ n_3$ in n_4.

Az a és b paraméterek függvényében számítsa ki az $n_1,\ n_2,\ n_3$ és n_4 számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

(4 točke/pont)

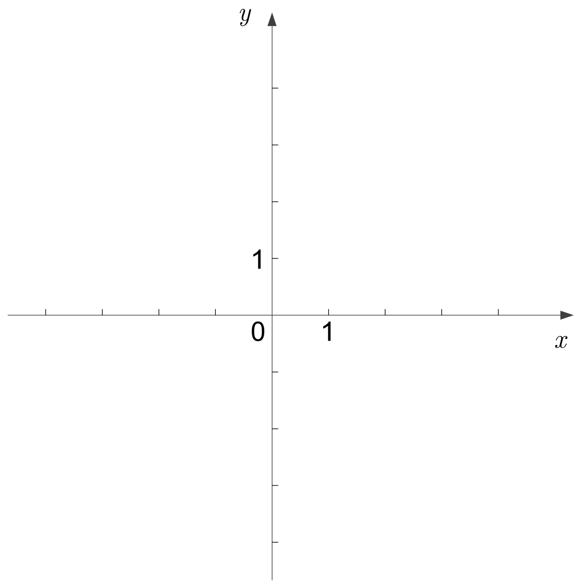
Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole. /
A 4. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

4. Rešite naslednje naloge o zaporedjih, funkcijah iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$.

   Oldja meg sorozatokról, $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényekről szóló feladatokat!

4.1. Naj bo dana funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(n) = \frac{1}{4}n^2$. Narišite graf funkcije f. Ali je f bijektivna funkcija? Odgovor utemeljite.

Adott az $f(n) = \frac{1}{4}n^2$ hozzárendelési szabállyal megadott $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény. Ábrázolja az f függvény grafikonját! Bijektív-e az f függvény? Válaszát indokolja meg!

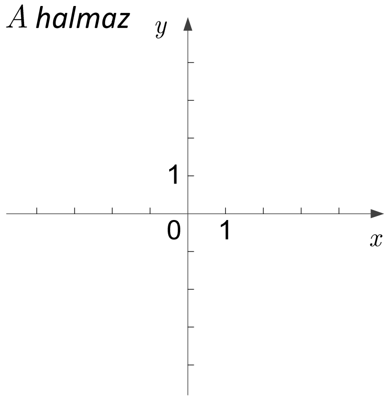


(3 točke/pont)

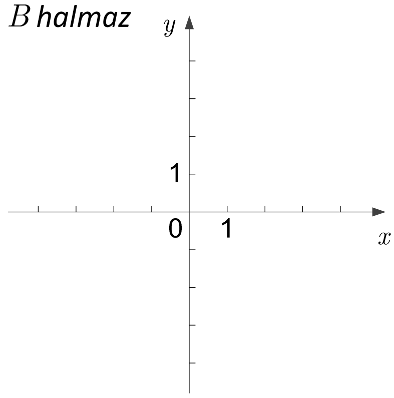
4.2. V ravnini $\mathbb{R}^2$ narišite množici $A = \mathbb{N} \times [-1, 2)$ in $B = \mathbb{N} \times \{1\}$.

A $\mathbb{R}^2$ síkban ábrázolja az $A = \mathbb{N} \times [-1, 2)$ és $B = \mathbb{N} \times \{1\}$ halmazokat!

množica A /
A halmaz



množica B /
B halmaz



Ali je množica A graf neke funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Odgovor utemeljite.

Grafikonja-e az A halmaz valamely $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvénynek? Válaszát indokolja meg!

Ali je množica B graf neke funkcije $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$? Odgovor utemeljite.

Grafikonja-e a B halmaz valamely $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ függvénynek? Válaszát indokolja meg!

(4 točke/pont)

4.3. Naj bo dana funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(n)=\frac{n}{n^2+1}$. Dokažite, da je f padajoča in omejena funkcija.

Adott az $f(n)=\frac{n}{n^2+1}$ hozzárendelési szabállyal megadott $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ függvény. Bizonyítsa be, hogy az f függvény csökkenő és korlátos függvény!

(4 točke/pont)

4.4. Naj bo dana funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(n)=\sqrt{n}$. Izračunajte limito $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(n^2+n\right)-f\left(n^2\right)\right)$.

Adott az $f(n)=\sqrt{n}$ hozzárendelési szabállyal megadott $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ függvény. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(n^2+n\right)-f\left(n^2\right)\right)$ határértéket!

(2 točki/pont)

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

Prazna stran

Üres oldal

M 1 9 2 4 0 2 1 2 M 2 0

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

Prazna stran

Üres oldal