Šifra kandidata:
A jelölt kódszáma:

Državni izpitni center

SPOMLADANSKI IZPITNI ROK
TAVASZI VIZSGAIDŐSZAK

M 1 8 1 4 0 2 1 2 M

Višja raven
Emelt szint

MATEMATIKA

Izpitna pola 2
2. feladatlap

Sobota, 9. junij 2018 / 90 minut
2018. június 9., szombat / 90 perc

Dovoljeno gradivo in pripomočki: Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo). Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

Engedélyezett segédeszközök:
A jelölt töltőtollat vagy golyóstollat, ceruzát, radírt, számológépet, rajzeszközöket (körzőt, két háromszöget, esetleg vonalzót) hoz magával. A jelölt kap egy értékelő lapot, a vázlatkészítéshez pedig két pótlapot.

SPLOŠNA MATURA
ÁLTALÁNOS ÉRETTSÉGI VIZSGA

Navodila kandidatu so na naslednji strani.
A jelöltnek szóló útmutató a következő oldalon olvasható.

Ta pola ima 20 strani, od tega 5 rezervnih in 3 prazne.
A feladatlap 20 oldalas, ebből 5 tartalék és 3 üres.

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.
Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na prvi strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	**4.**

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 14 do 18 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

ÚTMUTATÓ A JELÖLTNEK

Figyelmesen olvassa el ezt az útmutatót!
Ne lapozzon, és ne kezdjen a feladatok megoldásába, amíg azt a felügyelő tanár nem engedélyezi!

Ragassza vagy írja be kódszámát a feladatlap első oldalának jobb felső sarkában levő keretbe és az értékelő lapra! Kódszámát a pótlapokra is írja rá!

A feladatlap 4 strukturált feladatot tartalmaz. Az első két feladat megoldása kötelező, a másik kettőből válasszon ki egyet, és azt oldja meg.Összesen 40 pontot érhet el. A feladatlapban a feladatok mellett feltüntettük az elérhető pontszámot is. A feladatok megoldásakor használhatja a 4. oldalon található standard képletgyűjteményt.

A táblázatban "x"-szel jelölje meg, hogy melyik feladatot értékeljék. Ha ezt nem teszi meg, a megoldott feladatok közül az elsőt értékelik.

3.	***4.***

*Válaszait töltőtollal vagy golyóstollal írja a **feladatlap** erre kijelölt helyére! Rajzoláshoz használhat ceruzát is. Ha tévedett, a leírtat húzza át, majd válaszát írja le újra! Az olvashatatlan megoldásokat és a nem egyértelmű javításokat 0 ponttal értékeljük. A 14–18. oldal tartalék. Ide csak akkor írjon, ha másutt már nincs hely! Egyértelműen jelölje meg, hogy melyik feladatokat oldotta meg ezeken az oldalakon! A pótlapokra készített vázlatokat az értékelés során nem veszik figyelembe.*

A válasznak tartalmazniuk kell a megoldásig vezető műveletsort, az összes köztes számítással és következtetéssel együtt. Ha a feladatot többféleképpen oldotta meg, egyértelműen jelölje, melyik megoldást értékeljék!

Bízzon önmagában és képességeiben! Eredményes munkát kívánunk!

V sivo polje ne pišite. / A szürke mezőbe ne írjon!

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$:

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, če je $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integral: $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Képletek

$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* n *páratlan természetes szám*

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, *ha* $n \in \mathbb{N}$

A derékszögű háromszög magasságtétele és befogótétele: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $v_c^2 = a_1b_1$

A háromszög köré írt kör és a háromszögbe írt kör sugara: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

A félszögek szögfüggvényei:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Addíciós tételek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$

Összegek szorzattá történő átalakításának képletei:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

A szorzatok összeggé történő átalakításának képletei:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

A $T_0(x_0, y_0)$ *pont távolsága az* $ax + by - c = 0$ *egyenletű egyenestől:* $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Az $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *csúcsú háromszög területe:*

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Ellipszis: $e^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, *ha* $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ *a parabola fókuszpontja*

Összetett (kompozítum) függvény: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoulli-képlet: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integrál: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + C$

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

Prazna stran
Üres oldal

OBRNITE LIST.
LAPOZZON!

Naloga 1 je obvezna. / *Az 1. feladat kötelező.*

1. Dana je funkcija f, za katero velja, da je $f(2x-1)=\dfrac{x-1}{x^2+x}$ za poljuben $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$.

   Adott az f függvény, amelyre tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$ esetén fennáll az $f(2x-1)=\dfrac{x-1}{x^2+x}$ egyenlőség.

   1.1. Dokažite, da funkcijo f lahko podamo s predpisom $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4x+3}$.

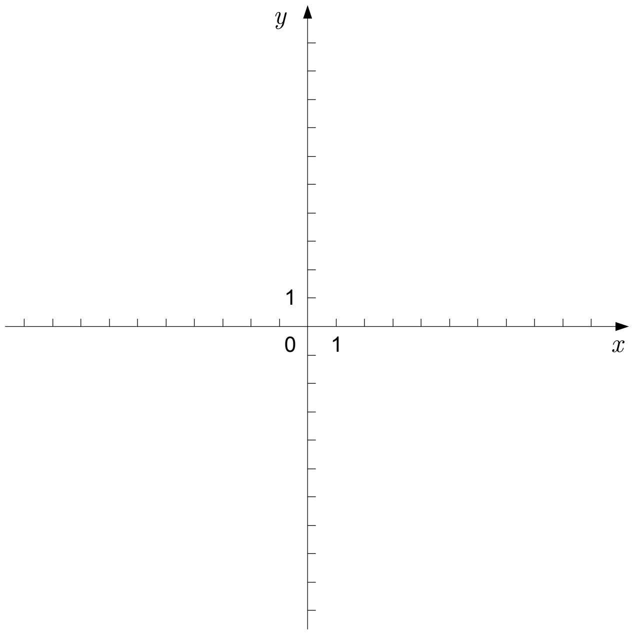
   Bizonyítsa be, hogy az f függvény megadható az $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4x+3}$ hozzárendelési szabállyal!

   (2 točki/pont)

   1.2. Izračunajte, v katerih vrednostih spremenljivke x ima funkcija f stacionarne točke.
   Számítsa ki, hogy az x változó mely értékeire van az f függvénynek stacionárius pontja!

   (4 točke/pont)

   1.3. Določite vse ničle in pole funkcije f. Narišite graf funkcije f in zapišite enačbo njegove vodoravne asimptote. / *Határozza meg az f függvény minden zérushelyét és pólusát! Ábrázolja az f függvény grafikonját, és írja fel a vízszintes aszimptotája egyenletét!*



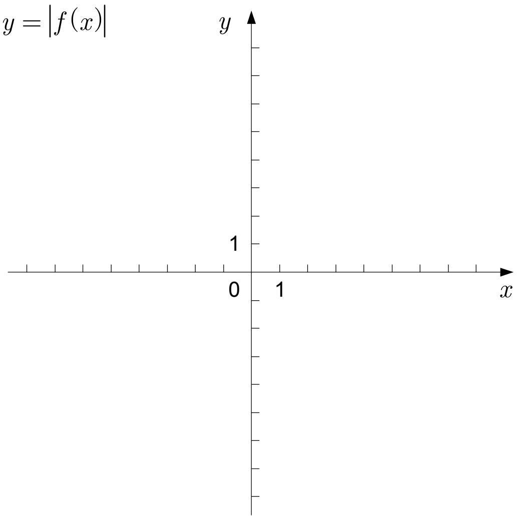
(6 točk/pont)

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

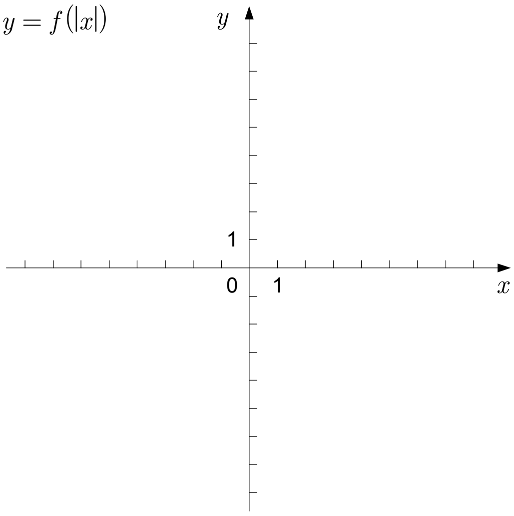
1.4. Narišite krivulji, dani z enačbama $y = |f(x)|$ in $y = f(|x|)$.

Ábrázolja az $y = |f(x)|$ *és* $y = f(|x|)$ *egyenlettel megadott görbéket!*

$y = |f(x)|$



$y = f(|x|)$



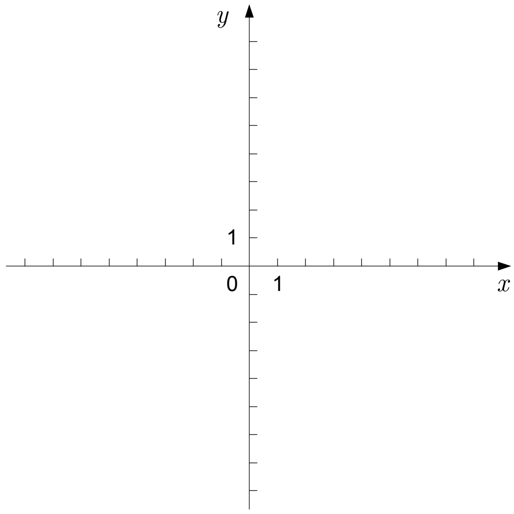
(2 točki/pont)

Naloga 2 je obvezna. / *A 2. feladat kötelező.*

2. Rešite naloge o množicah točk v ravnini. / *Oldja meg a síkbeli ponthalmazokkal kapcsolatos feladatokat!*

2.1. V koordinatnem sistemu ponazorite množico točk
$A=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ (|x-3|<2)\wedge(y>-1)\wedge(x+y<6)\}$.

Ábrázolja koordináta-rendszerben az $A=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ (|x-3|<2)\wedge(y>-1)\wedge(x+y<6)\}$ *ponthalmazt!*



(4 točke/pont)

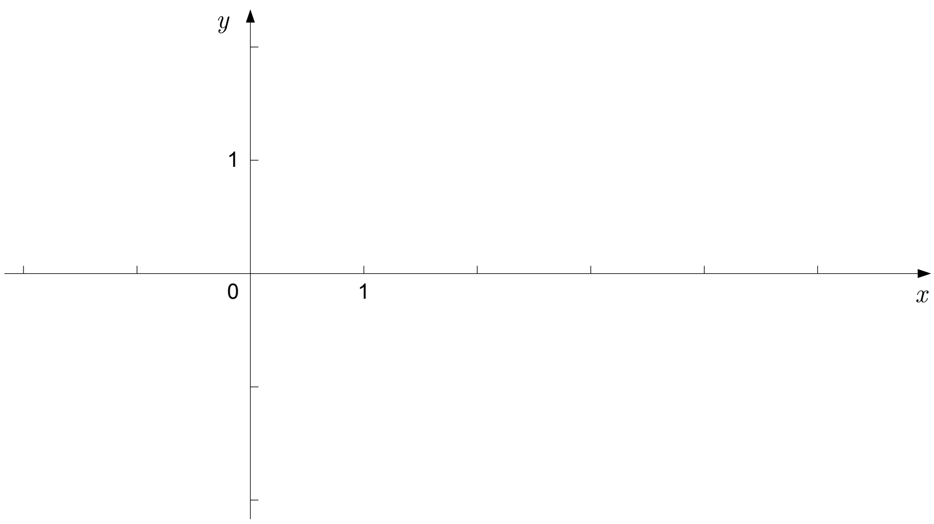
2.2. Izračunajte ploščino območja $B=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ (|x-3|\le 2)\wedge(y\ge -1)\wedge(x+y\le 2018)\}$.

Számítsa ki a $B=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ (|x-3|\le 2)\wedge(y\ge -1)\wedge(x+y\le 2018)\}$ *ponthalmaz területét!*

(3 točke/pont)

2.3. V koordinatnem sistemu ponazorite množici točk
$C_1=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ (x-1)^2+y^2=2^{-2}\}$ in
$C_2=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ (x-2)^2+y^2=2^{-3}\}$.

Ábrázolja koordináta-rendszerben a $C_1=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ (x-1)^2+y^2=2^{-2}\}$ *és a*
$C_2=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ (x-2)^2+y^2=2^{-3}\}$ *ponthalmazt!*



(2 točki/pont)

2.4. Za vsako naravno število n je $D_n = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (x-n)^2 + y^2 \leq 2^{-n-1}\right\}$. Izračunajte ploščino območja $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \ldots \cup D_n \cup \ldots$.

Minden n természetes szám esetén legyen $D_n = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (x-n)^2 + y^2 \leq 2^{-n-1}\right\}$. *Számítsa ki a $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \ldots \cup D_n \cup \ldots$ területét!*

(4 točke/pont)

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.
A 3. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

3. Realno zaporedje je podano rekurzivno: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 2$ in $a_2 = 3$.

   Egy valós számsorozatot rekurzívan adtak meg: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 2$ *és* $a_2 = 3$.

   3.1. S popolno indukcijo dokažite, da za poljubno naravno število n velja $a_n = n+1$.

   Bizonyítsa teljes indukcióval, hogy tetszőleges n szám esetén fennáll az $a_n = n+1$!

   (3 točke/pont)

   3.2. Izračunajte vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{a_n}}{3^{a_n}}$.

   Számítsa ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{a_n}}{3^{a_n}}$ sorösszeget!

   (4 točke/pont)

   3.3. Izračunajte limite:

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}$,

   $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{a_n x}$, kjer je $x \neq 0$,

   $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{a_n x}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

   Számítsa ki a következő határértékeket:

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}$,

   $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{a_n x}$, *ahol* $x \neq 0$,

   $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{a_n x}$, *ahol* $n \in \mathbb{N}$.

   (6 točk/pont)

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.
A 4. feladat választható. A 3. és a 4. feladat közül választhat. Választását jelölje meg a feladatlap címlapján!

4. V predavalnici je 40 stolov, ki so razdeljeni v 5 vrst tako, da je v vsaki vrsti enako število stolov. Na stole se naključno posede 8 študentov matematike: Maja, Eva, Ela, Jan, Tim, Nik, Luka in France.
Az előadóteremben 40 szék van, amelyek 5 sorba vannak rendezve úgy, hogy minden sorban egyenlő számú szék van. A székekre 8 egyetemi hallgató (Maja, Éva, Ela, Jan, Tim, Nik, Luka és France) ült le tetszőlegesen.

4.1. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
A – prva vrsta ostane prazna,
B – v prvi vrsti so zasedeni natanko 3 stoli,
C – vsi študenti so se posedli v isto vrsto.

Számítsa ki a következő események valószínűségét:
A – *az első sor üresen maradt,*
B – *az első sorban pontosan 3 szék foglalt,*
C – *minden hallgató ugyanabba a sorba ült le.*

(7 točk/pont)

Maja, Eva, Ela, Jan, Tim, Nik, Luka in France ob popoldnevih igrajo družabne igre. Vsak natanko enkrat vrže pošteno igralno kocko.
Maja, Éva, Ela, Jan, Tim, Nik, Luka és France délutánonként társasjátékokat játszanak. Mindegyikük pontosan egyszer dobta fel a szabályos játékkockát.

4.2. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
D – nihče ne vrže šestice,
E – natanko dva vržeta šestico,
F – vsaj dva vržeta šestico in
H – šestico vržeta samo Maja in France.

Számítsa ki a következő események valószínűségét:
D – *senki sem dobott hatost,*
E – *pontosan ketten dobtak hatost,*
F – *legalább ketten dobtak hatost,*
H – *hatost csak Maja és France dobott.*

(6 točk/pont)

V sivo polje ne pišite. / *A szürke mezőbe ne írjon!*

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN

TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

REZERVNA STRAN
TARTALÉK OLDAL

Prazna stran

Üres oldal

M 1 8 1 4 0 2 1 2 M 2 0

Prazna stran

Üres oldal