Šifra kandidata:

Državni izpitni center

M 1 9 2 4 0 2 1 2

JESENSKI IZPITNI ROK

Višja raven

MATEMATIKA

Izpitna pola 2

Ponedeljek, 26. avgust 2019 / 90 minut

Dovoljeno gradivo in pripomočki:
Kandidat prinese nalivno pero ali kemični svinčnik, svinčnik, radirko, računalo in geometrijsko orodje (šestilo in dva trikotnika, lahko tudi ravnilo).
Kandidat dobi dva konceptna lista in ocenjevalni obrazec.

SPLOŠNA MATURA

NAVODILA KANDIDATU

Pazljivo preberite ta navodila.

Ne odpirajte izpitne pole in ne začenjajte reševati nalog, dokler vam nadzorni učitelj tega ne dovoli.

Prilepite kodo oziroma vpišite svojo šifro (v okvirček desno zgoraj na tej strani in na ocenjevalni obrazec). Svojo šifro vpišite tudi na konceptna lista.

Izpitna pola vsebuje 4 strukturirane naloge. Prvi dve nalogi sta obvezni, med ostalima dvema izberite in rešite eno. Število točk, ki jih lahko dosežete, je 40. Za posamezno nalogo je število točk navedeno v izpitni poli. Pri reševanju si lahko pomagate s standardno zbirko zahtevnejših formul na strani 3.

V preglednici z "x" zaznamujte, katero od izbirnih nalog naj ocenjevalec oceni. Če tega ne boste storili, bo od teh ocenil prvo nalogo, ki ste jo reševali.

3.	4.

Rešitve, ki jih pišite z nalivnim peresom ali s kemičnim svinčnikom, vpisujte **v izpitno polo** pod besedila nalog in na naslednje strani. Rišete lahko tudi s svinčnikom. Če se zmotite, napisano prečrtajte in rešitev zapišite na novo. Nečitljivi zapisi in nejasni popravki bodo ocenjeni z 0 točkami. Strani od 12 do 16 so rezervne; uporabite jih le, če vam zmanjka prostora. Jasno označite, katere naloge ste reševali na teh straneh. Osnutki rešitev, ki jih lahko naredite na konceptna lista, se pri ocenjevanju ne upoštevajo.

Pri reševanju nalog mora biti jasno in korektno predstavljena pot do rezultata z vsemi vmesnimi računi in sklepi. Če ste nalogo reševali na več načinov, jasno označite, katero rešitev naj ocenjevalec oceni.

Zaupajte vase in v svoje zmožnosti. Želimo vam veliko uspeha.

Ta pola ima 16 strani, od tega 5 rezervnih.

V sivo polje ne pišite.

Formule

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je n liho naravno število

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, če je $n \in \mathbb{N}$

Evklidov in višinski izrek v pravokotnem trikotniku: $a^2 = ca_1,\ b^2 = cb_1,\ v_c^2 = a_1b_1$

Polmera trikotniku očrtanega in včrtanega kroga: $R = \frac{abc}{4S},\ r = \frac{S}{s},\ s = \frac{a+b+c}{2}$

Kotne funkcije polovičnih kotov:

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2},\ \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Adicijski izrek:

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

Faktorizacija:

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

Razčlenitev produkta kotnih funkcij:

$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Razdalja točke $T_0(x_0, y_0)$ od premice $ax + by - c = 0$: $d(T_0, p) = \left|\frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Ploščina trikotnika z oglišči $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$:

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

Elipsa: $e^2 = a^2 - b^2,\ \varepsilon = \frac{e}{a}$, če je $a > b$

Hiperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola: $y^2 = 2px$, gorišče $G\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Kompozitum funkcij: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bernoullijeva formula: $P(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Integral: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Naloga 1 je obvezna.

1. Nalogo rešite brez uporabe računala.

   Dana je funkcija $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=\tan x-\sin(2x)$.

1.1. Dokažite, da je f periodična funkcija s periodo π. Izračunajte vse ničle funkcije f.

(5 točk)

1.2. V točki $T\left(\frac{\pi}{3},\ y_0\right)$ položimo tangento na graf funkcije f. Izračunajte njeno enačbo.

(4 točke)

1.3. Poiščite tisto funkcijo $F:\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, za katero velja, da je $F'=f$ in $F(\pi)=1$.

(4 točke)

Naloga 2 je obvezna.

2. Dan je enakokraki trapez $ABCD$ s podatki $a = |AB| = 20$ cm, $b = |BC| = 10$ cm, $c = |CD| = 8$ cm, $d = |AD| = 10$ cm.

2.1. Dokažite, da meri višina trapeza 8 cm. Izračunajte prostornino pokončne prizme z višino 3 cm, ki ima za osnovno ploskev trapez $ABCD$.

(4 točke)

2.2. Izračunajte ploščino trapeza $A_1B_1C_1D_1$, ki ga dobimo s središčnim raztegom trapeza $ABCD$. Razteg ima središče v točki A in faktor $\sqrt{2}$.

(2 točki)

2.3. Trapez $ABCD$ zavrtimo okrog njegove simetrale za $180°$. Izračunajte površino in prostornino nastale vrtenine.

(8 točk)

Naloga 3 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

3. Naj bosta $a,\ b \in \mathbb{N}$ in naj bodo dana naravna števila

$n_1 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^b \cdot 7^b$,

$n_2 = 2^b \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 7^b$,

$n_3 = 2^b \cdot 3^b \cdot 5^a \cdot 7^b$,

$n_4 = 2^b \cdot 3^b \cdot 5^b \cdot 7^a$.

3.1. Za dana para števil a in b razvrstite števila n_1, n_2, n_3 in n_4 po velikosti od najmanjšega do največjega.

$a = 2019$ in $b = 2018$: _______ $<$ _______ $<$ _______ $<$ _______

$a = 2018$ in $b = 2019$: _______ $<$ _______ $<$ _______ $<$ _______

(4 točke)

3.2. Dokažite, da števili n_1 in n_2 nista niti praštevili niti tuji si števili.

(2 točki)

3.3. V odvisnosti od parametrov a in b (za primere $a > b$, $a = b$ ali $a < b$) zapišite število $\frac{n_1}{n_2}$ kot okrajšan ulomek.

(3 točke)

3.4. V odvisnosti od a in b izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil n_1, n_2, n_3 in n_4.

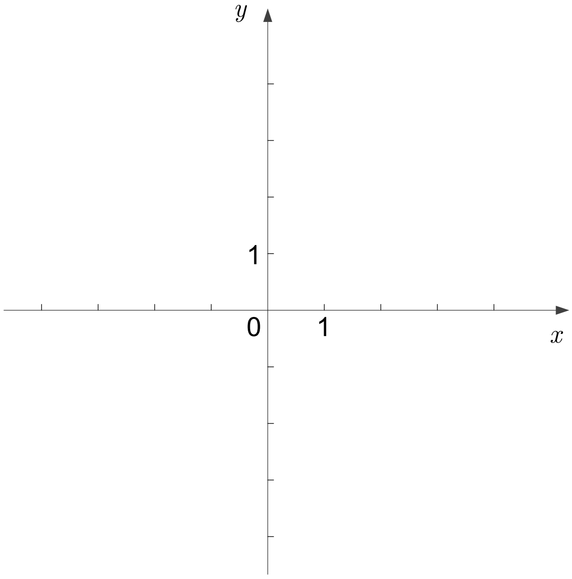
(4 točke)

V sivo polje ne pišite.

Naloga 4 je izbirna. Izbirate med nalogama 3 in 4. Izbiro zaznamujte na naslovnici izpitne pole.

4. Rešite naslednje naloge o zaporedjih, funkcijah iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$.

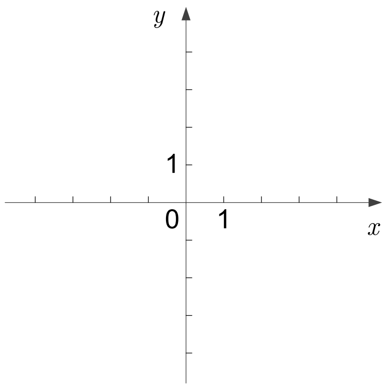
4.1. Naj bo dana funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(n)=\frac{1}{4}n^2$. Narišite graf funkcije f. Ali je f bijektivna funkcija? Odgovor utemeljite.



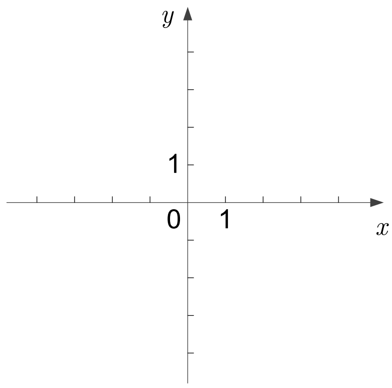
(3 točke)

4.2. V ravnini $\mathbb{R}^2$ narišite množici $A=\mathbb{N}\times[-1,\ 2)$ in $B=\mathbb{N}\times\{1\}$.

množica A



množica B



Ali je množica A graf neke funkcije $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$? Odgovor utemeljite.

Ali je množica B graf neke funkcije $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$? Odgovor utemeljite.

(4 točke)

4.3. Naj bo dana funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(n)=\frac{n}{n^2+1}$. Dokažite, da je f padajoča in omejena funkcija.

(4 točke)

4.4. Naj bo dana funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(n)=\sqrt{n}$. Izračunajte limito $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(n^2+n)-f(n^2)\right)$.

(2 točki)

V sivo polje ne pišite.

M 1 9 2 4 0 2 1 2 1 2

REZERVNA STRAN

V sivo polje ne pišite.

REZERVNA STRAN

REZERVNA STRAN

V sivo polje ne pišite.

REZERVNA STRAN

M 1 9 2 4 0 2 1 2 1 6

REZERVNA STRAN