MATURA - za ogrevanje 1 - OR

1. V ravnini narišite premice $x - y = 2$, $x = -3$ ter $y = 4$ in izračunajte ploščino trikotnika, ki ga omejujejo! $[S = \frac{9 \cdot 9}{2}]$

2. Poiščite D in v izrazov: $8x^5 - 32x^4 + 32x^3$, $\quad 24x^3 - 96x$, $\quad 12x^6 + 36x^5 - 120x^4$

$$8x^5 - 32x^4 + 32x^3 = 8x^3(x-2)^2$$

$$24x^3 - 96x = 24x(x+2)(x-2)$$

$$12x^6 + 36x^5 - 120x^4 = 12x^4(x-2)(x+5)$$

$$D = 4x(x-2) \qquad\qquad v = 24x^4(x-2)^2(x+2)(x+5)$$

3. Dana je premica $p: \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$. Zapišite enačbo premice, ki je pravokotna na premico p ter poteka skozi koordinatno izhodišče in izračunajte kot (na minute natančno), ki ga premica p oklepa s premico $2x + y = 3$.
   Rešitev: Premica p v eksplicitni obliki je $y = \frac{2}{3}x - 2$, zato je enačba pravokotnice, ki gre skozi izhosišče, enaka: $y = -\frac{3}{2}x$ (Uprabili smo: $k_p = -\frac{1}{k}$

   Smerni koeficient premice p je enak $k_1 = \frac{2}{3}$, druge premice pa $k_2 = -2$. Iz formule za kot med premicama $\tan\varphi = |\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}|$ sledi $\varphi = 82^o 52'$. Opomba: Enaka formula je za kot med krivuljama!

4. Otrokom iz 1.č oddelka je Miklavž prinesel bonbone. Če jih da vsakemu po 25, mu jih 10 ostane, če pa da vsakemu po 26, mu jih 19 zmanjka. Izračunajte, kolikim otrokom je prinesel bonbone in koliko je bilo vseh bonbonov skupaj!

   Rešitev: $b = 25n + 10$ in $b = 26n - 19$. (Uporabili smo izrek o deljenju z osnakom: (Če število b delimo s številom n, dobimo količnik k in ostanek o, kar zapišemo takole: $b = kn + o$.

   Rešitev je: $b = 735$ in $n = 29$. Otrok je bilo 29, Miklavž pa je imel 735 bonbonov.

5. V deltoidu $ABCD$ (nosilka diagonale BD je simetrijska os) merijo: stranica $AD = 5cm$, stranica $AB = 7cm$, kot $\angle B = \beta = 47^o$ in kot $\angle D = \delta = 73^o$. Izračunajte natančno dolžino diagonale $f = BD$.
   Rešitev: Označimo $a = AD$, $b = AD$. Ker je vsota notranjih kotov v štirikotniku enaka 360^o in sta kota pri A in C v deltoidu skladna, meri $\angle A = \alpha = 120^o$. Po kosinsnem izreku izračunamo $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^o$. Dobimo $f = \sqrt{109} \approx 10.4cm$.

6. V geometrijskem zaporedju $18, 6, 2, \cdots$ izračunajte natančno vrednost 15. člena in vsoto prvih 15 členov!

   Rešitev: $a_1 = 18$, $q = \frac{1}{3}$, $a_n = a_1 q^{n-1} = 18 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}$ $a_{15} = \frac{2}{531441}$ in $S_n = \frac{a_1(q^n-1}{q-1}$ $s_{15} = \frac{14348906}{531441}$

7. Izračunajte, za katere x je funkcija $f(x) = \sqrt{-x^2+5x+14}$ realna! $[[-2, 7]]$

   Korenjenec mora biti večji od 0. Torej:

$$-x^2 + 5x + 14 \geq 0$$

$$x^2 - 5x - 14 \leq 0$$

$$(x-7)(x+2) \leq 0$$

   Skiciramo graf, parabola je odprta navzgor, pod x osjo leži na intervalu $x \in [-2, 7]$.

8. Rešite enačbo: $1 + \log_2(4x+1) = 0$ $[x = -\frac{1}{8}]$

$$1 + \log_2(4x+1) = 0$$

$$\log_2(4x+1) = -1$$

   Uporabimo definicijo logaritma: $\log_a x = y \quad \equiv \quad a^y = x$

$$2^{-1} = 4x + 1 \qquad x = -\frac{1}{8}$$

9. Narišite graf polonoma $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ (tudi ekstrenme) in izračunajte ploščino lika, ki ga graf polinoma oklepa z abscisno osjo na intervalu $[1, 3]$. $[S = 4]$

   Ploščina: $\int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x - 4)dx = -4 \quad S = 4$
   Opomba: Ploščina lika, ko ga graf oklepa z abscisno osjo, je $\frac{27}{4}$ (na intervalu $[1, 4]$)

10. Določite x tako, da bosta vektorja $\vec{a} = (x, 1-x)$ ter $\vec{b} = (-3, 2)$ enako dolga! $[-2in3]$
    Dolžino vektorja izračunamo po formuli: $|(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\sqrt{x^2 + (1-x)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$$

$$2x^2 - 2x + 1 = 13$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \qquad x_1 = -2, \qquad x_2 = 3$$

11. Nevzporedni stranici trapeza sta $b = 3\sqrt{3}cm$ in $d = 3cm$. Če ju podaljšamo, se sekata pod pravim kotom. Izračunajte kota ob osnovnici! [$\alpha = 60^o$]

    Rešitev: Stranico b vzporedno premaknemo skozi točko D. V pravokotnem trikotniku uporabimo kotne funkcije ...

12. Določite m tako, da bo imela enačba $x^2 + (m-1)x + 2m - 2 = 0$ dve različni realni rešitvi! [$(-\infty, 1) \cup (9, \infty)$]

    Rešitev: Duskriminanta mor abiti $D > 0$.

$$(m-1)^2 - 4(2m-2) > 0$$

$$(m-1)(m-9) > 0$$

    Skiciramo graf in odčitamo rešitev: tisti m, kjer je graf nad abscisno osjo:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (9, \infty)$$

13. Naj bo $f(x) = \frac{2x^2-1}{3-x}$. Izračunajte $f(3+i)$. [$-12 + 15i$]
    Vstavimo namesto x vrednost $3+i$ in dobimo:

$$\frac{2(3+i)^2 - 1}{3 - (3+i)} = -12 + 15i$$

14. Naj bo $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ ter $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Izračunajte natančno vrednost $\sin(\alpha - \frac{3\pi}{4})$.

    Iz zveze $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ izračunamo $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Upoštevamo, da je kosinus v tretjem kvadrantu negativen. Po adicijskem izreku razvijemo $\sin(\alpha - \frac{3\pi}{4})$ in dobimo $\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2}{3}$