MATURA Teme VR z rešitvami

4. narisati grafe preprostih sestavljenih funkcij;
   Narišite grafe funkcij: $f(x) = \sqrt{3x-1}$, $g(x) = \ln(3-2x)$, $h(x) = (\sin x - \frac{1}{2})^2$ $r(x) = \sqrt{\sin x}$, $s(x) = \ln(\cos x)$, $t(x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}$, $u(x) = \sqrt{4-x^2}$

8. razstaviti: $a^{2n+1} + b^{2n+1} (n \in \mathbb{N})$,

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

   Razstavite: $a^7 - 1$, $a^5 + 32b^5$, $x^6 - 64y^6$, $x^{15} + 1$.

$$a^7 - 1 = (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + a)$$
$$a^5 + 32b^5 = (a+2b)(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4)$$
$$x^6 - 64x^6 = (x^3 - 8y^3)(x^3 + 8y^3) =$$
$$= (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)(x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$
$$x^{15} + 1 = (x+1)(x^{14} - x^{13} + \cdots + x^2 - x + 1)$$

10. izračunati ali oceniti absolutno in relativno napako približka,
    Dani sta približni vrednosti: $a = 5.1 \pm 0.2$ *ter* $b = 7.5 \pm 0.3$. *Ocenite* $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ *ter* $\frac{a}{b}$

11. v kompleksni ravnini ponazoriti množico točk, ki ustrezajo danim pogojem,
    V kompleksni ravnini narišite množico kompleksnih števil, ki ustrezajo pogoju: $|z - 3 + 2i| < 3$

$$|x+yi-3+2i|<3$$
$$|x-3+(y+2)i|<3$$
$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}<3$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2<9$$

Pogoju ustrezajo vsa kompleksna števila v kompleksni, ki ležijo znotraj krožnice s središčem v točki $S(3,-2)$ in polmerom 3.

15. konstruirati tangenti na krožnico iz poljubne zunanje točke,

    Središče krožnice naj bo S, točka izven krožnicepa T. Uporabimo Talesov izrek o kotu v polkrogu: Kot v polkrogu je pravi kot. Povežemo ST, poiščemo razpolovišče R daljice ST, narišemo krožnico s središčem v R in polmerom RS. Ta krožnica seka dano krožnico v točkah A in B. Premici TA in TB sta iskani tankenti (kota SAT in SBT sta prava kota).

36. narisati grafe funkcij $f(x)=A\,tg(\omega x+\varphi)$, $f(x)=A\,ctg(\omega x+\varphi)$,
    Narišite funkcijo $f(x)=tg(\frac{\pi}{2}-x)$

39. določiti limito danega konvergentnega zaporedja,
    Določite limito zaporedja: $\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{13}{16},\frac{9}{11},\cdots$ *[*$\frac{5}{6}$*]*

40. računati z limitami,

    Izračunajte limite: a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{-2n^2+3n-2}$ *b)* $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$
    c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *[Odg: a)*$-\frac{1}{2}$*, b)* $\frac{3}{2}$*, c)* e^{-1}*]*

    a) Števec in imenovalec delimo z n b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$. Števec in imenovalec pomnožimo z $\sqrt{n+3}+\sqrt{n}$ in dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(n+3-n)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=$$

Števec in imenovalec delimo s $\sqrt{n}$ (pod koreni delimo z n) ter sledi:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3}{2}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-\frac{n}{n+1}} = e^{-1}$$

42. izračunati limito funkcije v dani točki z uporabo pravil,

43. izračunati enostavne posebne primere limit funkcij,

Izračunajte limite: a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ *b)* $\lim_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+1}-x))$ *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{tg5x}{x}$ *č)* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ *d)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ *e)* $\lim_{x\to 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$ *[Odg: a)* $-\frac{2}{5}$, *b)* $\frac{1}{2}$, *c)* 5, *č)* $\frac{1}{2}$, *d)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e)* $-\frac{1}{40}$*]*

a) Razstavimo števec in imenovalec, okrajšamo, ...

b) $\lim_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+1}-x))$. Števec in imenovalec pomnožimo z $\sqrt{x^2+1}+x$:

$$\lim_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+1}-x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

Števec in imenovalec delimo z x (pod korenom z x^2) :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x\cos 5x}=$$

Uporabimo: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x\cdot\cos 5x}=5$$

č) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. Števec preoblikujemo po formuli $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, ki je na maturitetnih formulah. Dobimo: $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$$

d) Imenovalec razstavimo: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$, okrajšamo i vstavimo $x=\frac{\pi}{4}$.

e) Imenovalec razstavimo na $(x-5)(x+5)$, nato pa števec in imenovalec pomnožimno z $2+\sqrt{x-1}$. Tako dobimo:

$$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{(x-5)(x+5)(2+\sqrt{x-1})}=-\frac{1}{40}$$

48. uporabljati uvedbo nove spremenljivke pri računanju nedoločenega in določenega integrala,

a) $\int\sqrt{3x-1}dx$ Nova spremenljivka: $3x-1=t$ $3dx=dt$ $dx=\frac{dt}{3}$

$$\int\sqrt{3x-1}dx=\int\sqrt{t}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3}+C$$

b) $\int \frac{dx}{2x-1}$ Nova spremenljivka: $2x-1=t$ $2dx=dt$ $dx=\frac{dt}{2}$

$$\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

$$\int \sin^5 \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$$

V zadnjem primeru smo uvedli novo spremenljivko $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$

Opomba: Ko računamo določeni integral z uvedbo nove spremenljivke, moramo ob uvedbi nove spremenljivke spremeniti meje. Še bolje pa je, da posebej izračunamo nedoločeni integral, ki ga končamo s prvotno spremenljivko, običajno je to x, in potem nadaljujemo z izračunom določenega integrala (vstavimo meje ...).
Preverite, če je res:

$$\int_1^8 \sqrt{3x-1}dx = 26$$

$$\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln 3$$