MATURA Teme VR z rešitvami

1. določiti potenčno množico dane končne množice in njeno moč;
   Zapišite potenčno množico množice $\mathcal{A} = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

   Potenčna množica je množica vseh podmnožic dane množice. Njena moč (moč je število elementov v množici, v tem primeru so elementi potenčne množice podmnožice dane množice) je enaka 2^n, kjer je n število elementov dane množice. Potenčno množico sestavimo tako, da kot njene elemente naštejemo naslednje podmnožice: { prazna, vse s po enim elementom, vse s po dvema elementoma, vse s po tremi elementi, $\cdots$ vse s po $n-1$ elementi, sama dana množica }. Ker vrstni red elementov v množici ni pomemben, je vseh podmnožic: $1+(n\ nad\ 1)+(n\ nad\ 2)+\cdots+(n-1\ nad\ n)+1 = (1+1)^n = 2^n$. V binomskem izreku smo uporabili $a = b = 1$).

2. sestaviti funkcijo iz dveh funkcij;
   Dani sta funkciji $f(x) = 2x - 1$ *in* $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$. *Zapišite funkciji* $(f \circ g)(x)$ *ter* $(g \circ f)(x)$.
   Tu gre za sestavo ali kompozitium dveh funkcij. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x-1}{x+1}) = 2(\frac{x-1}{x+1}) - 1 = \frac{x-3}{x+1}$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = \frac{(2x-1)-1)}{(2x-1)+1} = \frac{2x-2}{2x} = \frac{x-1}{x}$
   Pri določitvi definicijskega območja moramo upoštevati obe definicijski območji, odločilno je definicijsko območje funkcije $f(x)$) (oziroma desne funkcije): narišemo si skico!

   Dani sta funkciji $f(x) = e^x$ *in* $g(x) = -x^2$. *Zapišite (in narišite) f-jo* $(f \circ g)(x)$

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^2) = e^{-x^2}$

   Kompozitum funkcij ni komutativen! Seveda lahko poiščemo tudi $(f \circ f)(x) = f(f(x))$.
   Še to: $f^{-1}(f(x)) = x$ ter $f(f^{-1}(x)) = x$ oziroma opisno: če uporabimo na spremenljivke x najprej funkcijo, nato pa inverzno funkcijo, dobimo x. Primer: $e^{\ln x} = x$, $\ln e^x = x$

3. če je znan graf funkcije f, narisati grafe funkcij $f(kx)$, $f(|x|)$ in $f(kx+b)$.
Dana je f-ja: $f(x) = x^2 - 5x + 6$. *Narišite:* $f(2x)$, $f(x+2)$, $f(2x-1)$, $f(|x|)$.

Graf fukcije $f(kx)$ dobimo tako, da prvotno funkcijo raztegnemo s faktorjem k v smeri osi x. (Dober primer: $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin \frac{1}{2}x$).

$f(|x|)$ je soda funkcija. Ohranimo graf pri pozitivnih x in ga prezrcalimo čez os y. Lahko pa tudi vstavimo $|x|$ v funkcijo in upoštevamo dva primera: pri pozitivnih in pri negativnih x.

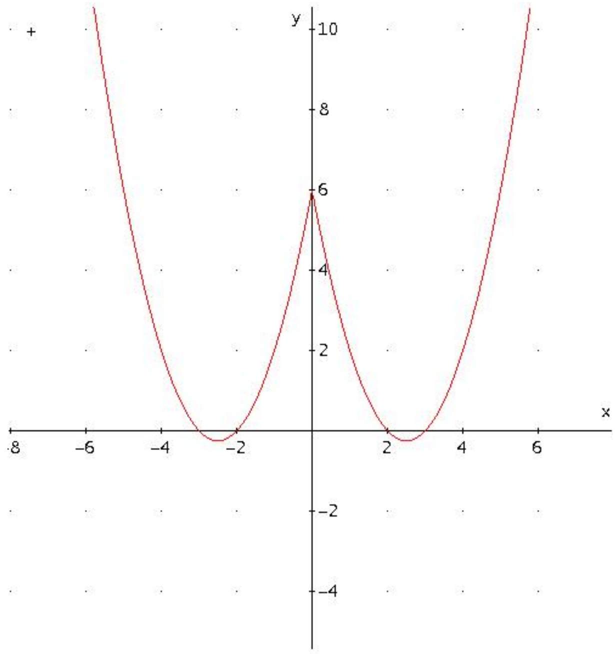
Funkcijo $f(kx+b)$ običajno najlaže narišemo tako, da ji poiščemo ničle, začetno vrednost in še kakšno točko ter seveda upoštevamo graf osnovne funkcije. Pazimo, ker k oz. $-k$ ni premik. Če hočemo ugotoviti premik, moramo funkcijo zapisati v obliki: $f(k(x+\frac{b}{k}))$. Premik je $\frac{b}{k}$.

Gornji primer pa lahko tudi najprej razvijemo in potem narišemo:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f(2x) = 4x^2 - 10x + 6, \qquad f(x+2) = x^2 - x \qquad f(2x-1) = 4x^2 - 14x + 12$$

$$f(|x|) = x^2 - 5|x| + 6 = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \geq 0 \\ x^2 + 5x + 6, & x < 0 \end{cases}$$



4. narisati grafe preprostih sestavljenih funkcij;
   Narišite grafe funkcij: $f(x) = \sqrt{3x-1}$, $g(x) = \ln(3-2x)$, $h(x) = (\sin x - \frac{1}{2})^2$ $r(x) = \sqrt{\sin x}$, $s(x) = \ln(\cos x)$, $t(x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}$, $u(x) = \sqrt{4-x^2}$

5. poiskati inverzno funkcijo grafično in, kadar je mogoče, analitično,
   Poiščite inverzno funkcijo k funkcijam: $f(x) = 5(x-1)^7$, $g(x) = 3 \cdot 2^{5x-1} + 3$ *in* $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\sqrt[7]{x} + 1$ $\quad g^{-1}(x) = \frac{1}{5}(\log_2(\frac{x-3}{3}) + 1)$ $\quad h^{-1}(x) = \frac{x+1}{2-x}$

6. uporabljati Evklidov algoritem za iskanje največjega skupnega delitelja,
   Z Evklidovim algoritmom poiščite $D(435, 1760)$. *[Odg: 5]*

$$1760 = 4 \cdot 435 + 20$$

$$435 = 21 \cdot 20 + 15$$

$$20 = 1 \cdot 15 + 5$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

Ali sta števili $9n-7$ in $4n-3$ tuji si števili za poljuben $n \in \mathbb{N}$. [Odg. Da]

$$9n-7 = 2(4n-3)+n-1$$
$$4n-3 = 4(n-1)+1$$
$$n-1 = 1(n-1)$$

Ker je zadnji od nič različen ostanek enak 1, je njun največji skupni delitelj enak 1, torej sta si števili $9n-7$ ter $4n-3$ tuji za vsak $n \in \mathbb{N}$.

7. s popolno indukcijo dokazati preproste matematične trditve;

   Dokažite, da je izraz $4^n + 15n - 1$ deljiv z 9 za $n \in \mathbb{N}$.

$$n = 1 \qquad 9|18$$
$$n \to n+1 \qquad\qquad 4^n + 15n - 1 = 9k$$
$$4^{n+1}+15(n+1)-1 = 4 \cdot 4^n+15n+14 = 4(4^n+15n-1)-3 \cdot 15n+18 =$$
$$= 4 \cdot 9k - 45n + 18 = 9(k-5n+2), \qquad q.e.d.$$

8. razstaviti: $a^{2n+1} + b^{2n+1} (n \in \mathbb{N})$,
   Razstavite: $a^7 - 1$, $a^5 + 32b^5$, $x^6 - 64y^6$, $x^{15} + 1$.

9. z uporabo izrekov o pravokotnem trikotniku konstruirati daljico z dolžino $\sqrt{n}$, $(n \in \mathbb{N})$,
   Narišite daljice dolge a) $\sqrt{6}$, b) $\sqrt{7}$, c) $\sqrt{5}\ a$, kjer je a poljubna daljica.

   $\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$ Uporabimo višinski izrek: narišemo odsek $b_1 = 2$ in odsek $a_1 = 3$, razpolovimo daljico $a_1 + b_1$ ter narišemo polkrog. Na stiku a_1 in b_1 narišemo pravokotnico, ...

10. izračunati ali oceniti absolutno in relativno napako približka,
Dani sta približni vrednosti: $a = 5.1 \pm 0.2$ *ter* $b = 7.5 \pm 0.3$. *Ocenite* $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ *ter* $\frac{a}{b}$

11. v kompleksni ravnini ponazoriti množico točk, ki ustrezajo danim pogojem,
V kompleksni ravnini narišite množico kompleksnih števil, ki ustrezajo pogojem: a) $Re\ z + Im\ z = -2$, *b)* $1 < |z| \leq 3$, *c)* $((Im\ z = -2) \wedge (|z| = 4))$ *č)* $\overline{z} - z = -8i, z \cdot \overline{z} = 25$ *[Odg: č)* $z_q = 3+4i, z_2 = -3+4i$*]*

Pri vseh nalogah uporabimo nastavek $z = x+yi$. a) $x+y = -2$
V kompleksni ravnini(x je realna os, y je imaginarna os) narišemo premico $x + y = -2$. Rešitev so torej vsa kompleksna števila, ki ležijo na tej premici, jih je neskončno, so oblike $z = x + (-2-y)i$.

b) $1 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \qquad 1 < x^2 + y^2 \leq 9$ Rešitev so vsa kompleksna števila v kolobarju (notranja meja ni všteta, zunanja je všteta)

c) $(y = -2) \wedge (x^2 + y^2 = 16)$ Dobimo presek krožnice in premice, torej točki $A(2\sqrt{3}, -2)$ ter $B(-2\sqrt{3}, -2)$ oziroma kompleksni števili $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ ter $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$

č)

$$x - yi - x - yi = -8i, \qquad (x+yi)(x-yi) = 25$$
$$-2yi = -8i, \qquad x^2 + y^3 = 25$$

Iz prve enačbe dobimo $y = 4$, nato pa še iz druge $x = \pm 3$. Rešitvi sta: $z_1 = 3 + 4i$ ter $z_2 = -3 + 4i$.

12. uporabljati lastnosti trikotnika pri zahtevnejših konstrukcijah,
Narišite trikotnik s podatki: a) c, v_c, t_c, *b)* c, γ, v_c, *c)* $a : b = 3 : 4, \gamma = 60^0, t_c = 2cm$, *d)* $a + b + c = 14cm, \alpha = 60^0, \beta = 45^0$

a) c, v_c, t_c Narišemo c, na razdalji v_c vzporednico k c, iz razpolovišča c odmerimo t_c, $\cdots$

b) c, γ, v_c Uporabimo izrek o središčnem in obodnem kotu: narišemo c, narišemo simetralo stranice c, v oglišču A narišemo kot $90^0 - \gamma$ (kot ASB je namreč središčni in velik 2γ), tako dobimo središče očrtane krožnice, ki jo narišemo, na razdalji v_c narišemo vzporednico k c, $\cdots$

c) $a : b = 3 : 4, \gamma = 60^0, t_c = 2cm$, Uporabimo podobnost: narišemo podobni trikotnik s stranicama $a' = 3$ in $b' = 4$ ter kotom $\gamma = 60^o$. Temu trikotniku narišemo t'_c in na njeni nosilki odmerimo $t_c = 2cm$. Še vzporednica k c' in trikotnik je načrtan.

d) Pomagamo si skico. Trikotniku narišemo nosilko stranice c, v A narišemo stranico b (in točko A'), v B pa stranico a (in točko B'). Izračunamo, da v trikotniku $A'B'C$ meri kot pri A' ravno $\frac{\alpha}{2}$, kot pri B' pa je enak $\frac{\beta}{2}$. Trikotnik konstruiramo tako, da narišemo daljico dolgo $a + b + c$. V levem oglišču narišemo kot $\frac{\alpha}{2}$, v desnem pa kot $\frac{\beta}{2}$. Še simetrali stranic $A'C$ ter $B'C$, pa dobimo trikotnik ABC.

13. uporabljati izreke o pravokotnem trikotniku,
a) $a_1 = 2, b_1 = 18$ *b)* $a = 136, v = 120$ [Odg.: a) $a = 2\sqrt{10}, b = 6\sqrt{10}, v = 6$ b) $a_1 = 64, b_1 = 225, b = 255, v = 120$]

    Pri točki a) smo uporabili višinski izrek $v_c^2 = a_1 b_1$.

14. uporabljati lastnosti paralelograma, trapeza in deltoida pri zahtevnejših konstrukcijah,
Narišite: a) paralelogram: $\alpha = 120^0, e = 2.5, v_a = 2$, *b) trapez:* $a = 9, b = 4, c = 5, d = 5$, *c) deltoid:* $e = 4, f = 7, a = 5$ č) Trapez: a, c, e, f

a) Paralelogram: $\alpha + \beta = 180^o$ V tem primeru ni nujno, da to uporbimo!

b) Trapez: narišemo vzporednico skozi C k stranici d ter načrtamo trikotnik s stranicami: $a - c$, b in d, ter ga dopolnimo do trapeza!

č) Trapez: Diagonalo f vzporedno premaknemo skozi C in narišemo trikotnik $a + c$, e, f $\cdots$

15. konstruirati tangenti na krožnico iz poljubne zunanje točke,

16. uporabljati Talesov izrek o kotu v polkrogu ter zvezo med obodnim in središčnim kotom,
Narišite trikotnik:a) $t_c = 3, b = 5, \gamma = 90^0$, *b)* $c = 6, v_b = 5, v_a = 4$

Kot v polkrogu je vedno pravi kot. Središčni kot je dvakrat večji od obodnega nad istim lokom. Vsi obodni koti nad istim lokom so skladni.

a) trikotnik je pravokotni, v pravokotnem trikotniku leži središče očrtane krožnice na razpolovišču hipotenuze, torej je $c = 2t_c = 6$. Najprej narišemo hiptenuzo c in narišemo očrtani krog (središče v razpolovišču c in polmerom $\frac{c}{2}$. Odmerimo $b \cdots$
b) Narišemo hipotenuzo in očrtamo krožnico (glejte prejšnjo točko!). Iz A odmerimo v_a na krožnico, dobimo točko N, ki je nožišče višine v_a, iz oglišča B odmerimo v_b na krožnico in dobimo točko M, ki je nožišče višine v_b. Podaljšamo AM ter BN in dobimo C.

Krožnici je včrtan štirikotnik, katerega oglišča delijo krožnico v razmerju $1 : 2 : 3 : 4$. *Izračunajte notranje kote tega štirikotnika! [Odg:* $90^0, 54^0, 90^0, 126^0$*]*

Dana razmerja so razmerja središčnih kotov, torej je $\varphi + 2\varphi + 3\varphi + 4\varphi = 360$ Dobimo $\varphi = 36^o$. Naprej gre na dva načina: Trikotniki, ki imajo središče v S in stranico eno izmed stranic štirikotnika, so enakokraki in lahko preračunamo kote ob osnovnicah. Preračunamo v notranje kote štuirikotnika. Druga možnost je preko središčnega in obodnega kota, na primer: $\angle CDA = \frac{1}{2}\angle CSA = \frac{1}{2}108^0 = 54^0$. Ostale podobno!

17. preveriti kolinearnost točk v prostoru,
Ali točki $C(8,-7,1)$ *in* $(-1,2,5)$ *ležita na premici skozi točki* $A(2,-1,3)$ *in* $B(-1,2,4)$*? [Odg: C da, D ne]*

Ker so točke v trirazsežnem prostoru, delamo z vektorji (če bi bile v ravnini, bi lahko zapisali enačbo premice). Vektorja sta kolinearna (vzporedna), če je $\vec{b} = k\vec{a}$. Točka C bo ležala na premici skozi A in B, če bosta vektorja $\vec{AC}$ in $\vec{AB}$ kolinearna:

$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-3,3,1)$ $\quad$ $\vec{AC} = (6,-6,-2) = -2(-3,3,1) = -2\vec{AB}$. Torej: C leži na premici skozi A in B. Podobno naredimo za točko D, za katero pa to ne velja.

18. uprabiti vektorski račun v geometriji (na primer: dokazovanje vzporednosti, računanje presečišč, težišča trokotnika),
a) V pravokotniku ABCD je točka N razpolovišče stranice BC, točka M pa leži na stranici AB tako, da je $|AM| : |AB| = 3 : 5$. *V kakšnem razmerju deli daljica MD daljico AN? [Odg:* $6 : 7$*]*

Naj bosta $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AD}$ bazna vektorja. NAj bo točka T presečišče daljic AN in MD. Princip reševanja takšnih nalog je, da vektor $\vec{AT}$ izrazimo na dva načina. Ker je razvoj vektorja po baznih vektorjih en sam, izenačimo koeficiente pri obeh izrazih in dobimo koeficienta razvoja. Torej:

$$\vec{AT} = m\vec{AN} = m(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = m\vec{a} + \frac{m}{2}\vec{b}$$

$$\vec{AT} = \vec{AM} + \vec{MT} = \frac{3}{5}\vec{a} + m\vec{MD} =$$

$$= \frac{3}{5}\vec{a} + n(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}) = (\frac{3}{5} - \frac{3n}{5})\vec{a} + n\vec{b}$$

Izenačimo koeficiente pri enakih baznih vektorjih: $n = \frac{m}{2}$ in $m = \frac{3}{5} - \frac{3n}{5}$ Dobimo $m = \frac{6}{13}$. Torej je $\vec{AT} = \frac{6}{13}\vec{AN}$, kar pomeni, da je daljica AN razdeljena s točko T v razmerju $6 : 7$.

b) Dani sta točki $A(-2, 2, 6)$ in $B(3, 2, -4)$. Točka T leži na daljici AB tako, da je $AT : TB = 4 : 1$. Določite koordinate točke T. [Odg: $T(2, 2, -2)$]

$\vec{OT} = \vec{AT} + \frac{4}{5}\vec{AB} = \vec{r}_A + \frac{4}{5}(\vec{r}_B - \vec{r}_A = (2, 2, -2)$

Točka T je torej: $T(2, 2, -2)$.

c) Dokažite, da so vektorji $(0, -3, 6)$, $(1, -1, 3)$ in $(2, 1, 0)$ komplanarni!

Vektorji so komplanarni, če ležijo v isti ravnini. To dokažemo tako, da enega izrazimo z drugima dvema. Pri tem dobimo tri enačbe z dvema neznankama. Iz dveh enačb izračunamo koeficienta. Oreverimo v tretji enačbi: če tudi tukaj ustrezata enaka koeficienta, so vektorji komplanarni, sicer ne. Ta preizkus je obvezen! V konkretnem primeru najprej označimo: $\vec{a} = (0, -3, 6)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ in $\vec{c} = (2, 1, 0)$. Nastavimo:

$$(2, 1, 0) = m(0, -3, 6) + n(1, -1, 3) = (n, -3m - n, 6m + 3n)$$

Dobimo: $2 = n$ $\quad 1 = -3m - n,$ $\quad$ in $0 = 6m + 3n$ $\quad$ Rešitev $n = 2$ in $m = -1$ ustreza vsem trem enačbam, zato je $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, torej so vektorji komplanarni (vsi ležijo v isti ravnini).

č) Izračunajte težišče trikotnika $A(2, -2, 4)$, $B(5, 0, 5)$, $C(-4, -4, 3)$. [Odg: $T(1, -2, 4)$]

Formula za težišče je posplošitev formule za delišče $T(\frac{x_1+y_1+z_1}{3}, \cdots, \cdots)$

d) Točke $A(2,0,-1)$, $B(4,-5,-6)$ in $C(2,1,0)$ so oglišča trikotnika. Pokažite, da je daljica AT pravokotna na ravnino trikotnika ABC, če je $T(2,3,-4)$.

AT bo pravokotna na ravnino, če bo pravokotna na dve premici v ravnini oziroma z vektorji: $\vec{AT}$ mora biti pravokoten na $\vec{AB}$ in na vektor $\vec{AC}$. To preverimo s skalarnim produktom, ki mora biti enak 0. $\vec{AT} = (0,-3,3)$, $\vec{AB} = (2,-5,-5)$, $\vec{AC} = (0,1,1)$. Izračunamo oba skalarna produkta, kista oba enaka 0.

19. izračunati dolžine stranic, kote in ploščino trikotnika v prostoru, če so dana oglišča,
Točke $A(-6,-8,-1)$, $B(-4,1,1)$ in $C(2,-5,-4)$ so oglišča trikotnika. a) Izračunjte kot α. b) Izračunjte dolžini t_c in v_c. c) Izračunajte ploščino trikotnika! [Odg: a)$64^0 20'$ b) $t_c = \frac{\sqrt{269}}{2}$ $v_c = \frac{2S}{|AB|}$ c) 38.5]

$\vec{AB} = (2,9,2)$ z dolžino $\sqrt{89}$, $\vec{AC} = (8,3,-3)$ z dolžino $\sqrt{82}$, $\vec{CB} = (-6,6,5)$ z dolžino $\sqrt{97}$. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 37$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}||\vec{AC}| \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{37}{\sqrt{89}\sqrt{82}}$$

Razpolovišče daljice AB je točka $R(-5,-\frac{7}{2},0)$. Dolžina težiščnice na stranico c je razdalja med C in R: $t_c = d(C,R) = \sqrt{7^2 + (\frac{3}{2})^2 + 16} = \frac{\sqrt{269}}{2}$. Ploščino trikotnika dobimo po formuli $S = \frac{cb\sin\alpha}{2} = \frac{|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\alpha}{2} = 38.5$. Lahko izračunamo tudi po Heronovi formuli. Višino na stranico c izrazimo iz formule za ploščino $S = \frac{cv_c}{2}$, kjer je $c = AB = \sqrt{89}$

20. izračunati razdaljo točke od premice,
Izračunaj razdaljo točke $T(1,1)$ *od premice* $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ *[Odg: 1]*

Razdaljo točke od premice izračunamo po formuli, ki je na maturitetnih formulah. Enačbo premice pa moramo spremeniti v implicitno obliko $4x+3y-12$. V formulo pa vstavimo kordinate dane točke.

$$d(T,p)=|\frac{ax_1+by_1-c}{\sqrt{a^2+b^2}}|=|\frac{4x_1+3y_1-12}{\sqrt{4^2+3^2}}|=|\frac{-5}{5}|=1$$

21. poiskati rešitev sistema linearnih enačb z več neznankami,
Rešite sistem: $2x-3y+z=11$, $x+y-u=-5$, $3x-2y+u=11$, $y+z-2u=-7$, *[Odg:* $x=1, y=-2, z=3, u=4$*]*

22. obravnavati in rešiti linearno enačbo (neenačbo) in sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama,
Rešite sistem dveh neenačb: $3(x-1)+2\geq 4(x+1)-5$; $\frac{x-1}{3}<2x+\frac{1}{6}$

Rešitev prve neenačbe je $x\leq 0$, druge pa $x>-\frac{3}{10}$, njun presek (ker rešujemo sistem) pa je enak: $-\frac{3}{10}<x\leq 0$
Obravnavajte enačbo: $a^2x+a=x(2a+15)+5$

$$a^2x-x(2a+15)=5-a$$
$$x(a-5)(a+3)=5-a$$

Obravavamo glede na vrednost parametra a: Prvič: $a=5$ $\quad x\cdot 0=0$ vsak $x\in\mathbb{R}$ je rešitev, Drugič: $a=-3$ $\quad x\cdot 0=8$ Enačba nima rešitve, Tretjič: $(a\neq 5)\wedge(a\neq -3)$ $\quad x=-\frac{1}{a+3}$

Obravnavajte neenačbo: $ax+1<a+x$

$x(a-1)<a-1$ Pri neenačbi moramo paziti tudi na predznak delitelja, ker se pri deljenju neenačbe z negativnim številom obrne znak neenakosti.

Prvič: $a=1$ $x\cdot 0<0$ nima rešitve

Drugič: $a>1$ $x<1$

Tretjič: $a<1$ $x>1$

Obravnavajte sistem: $2x+y=8a$, $ax+(a+1)y=6a^2+4a$. *[Odg: Če je* $a=-2$*, je nešteto rešitev, če je* $a\neq-2$*, je* $x=2a, y=4a$*.]*

Prvo enačbo pomnožimo z $-a$, drugo z 2 in seštejemo obe neenačbi. Tako dobimo:

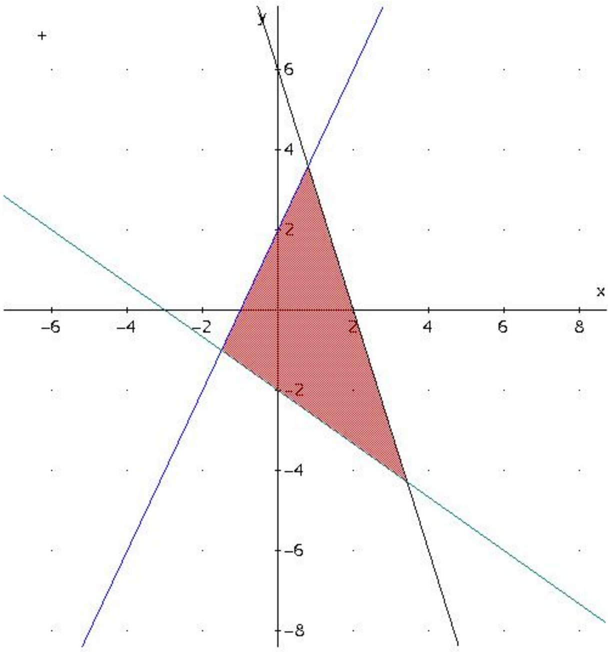
$$y(a+2)=4a^2+8a$$

Obravnavamo: Prvič: $a=-2$ Vstavimo v obe enačbi in obakrat dobimo enako: enačbo $2x+y=-16$. To je enačba premice. Se pravi, da ima v tem primeru sistem nekončno rešitev in sicer vse točke na premici $2x+y=-16$, to so točke $T(x,-2x-16)$.

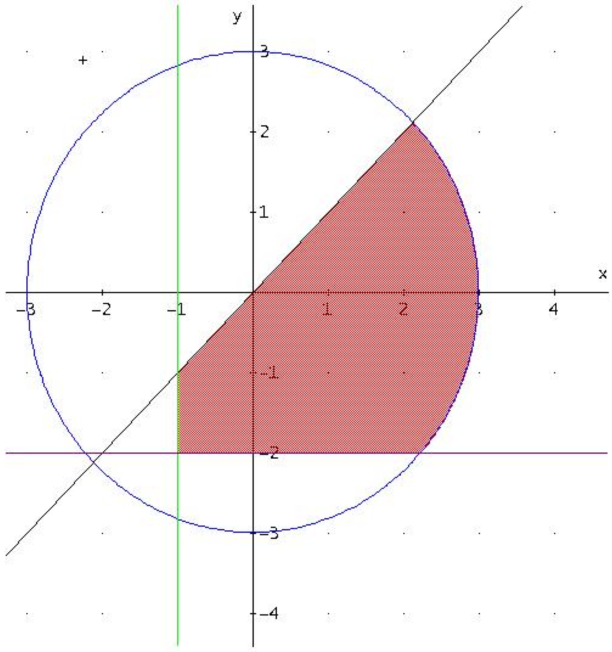
Drugič: $a\neq-2$ $y=4a$, $x=2a$ Za vsak $a\neq-2$ je ena rešitev!

Opomba: V splošnem se lahko zgodi še primer, ko sistem nima rešitve. To je takrta, ko sta dobljeni premici vzporendni (enak k, različen n.). To razberemo tudi tako, da vstavimo konkretni parameter v obe enačbi in dobimo protislovje (nerešljiv sistem). (Sistem ima lahko eno rešitev (točko), neskončno rešitev (vse točke na dobljeni premici) ali ni rešljiv.)

23. poiskati rešitev sistema več linearnih neenačb z dvema neznankama, *Narišite množico rešitev: a)* $2x - y + 2 \geq 0$ $3x + y - 6 \leq 0$, $2x + 3y + 6 \geq 0$



b) $x^2 + y^2 \leq 9$, $y \leq x$, $x > -1$, $y > -2$



24. rešiti sistem kvadratnih neenačb,
Rešite sistem neenačb: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 < 0$, $-2x^2 + 4x + 6 < 0$ *[Odg:* $x \in (-4, -1)$*]*

Rešitev prve neenačbe je $-4 < x < -1$, druge pa $(x < -1) \vee (x > 3)$. Ker morata biti izpolnjeni hkrati obe neenačbi (rešujemo sistem), moramo poiskati presek, ki je $-4 < x < -1$.

25. uporabiti kvadratno neenačbo pri reševanju problemov,
Za družino kvadratnih funkcij $f(x) = (m - \frac{3}{4})x^2 + mx + 1$ *poiščite realna števila* m, *za katera bodo grafi pripadajočih funkcij sekali abscisno os v dveh različnih točkah! [Odg:* $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$*]*

Diskriminanta D mora biti pozitivna: $D > 0$.

$$m^2 - 4(m - \frac{3}{4}) > 0$$

$$(m-1)(m-3) > 0$$

Rešitev: $(m < 1) \vee (m > 3)$

26. uporabiti dejstvo, da sta dva polinoma enaka natanko takrat, ko imata enake koeficiente,
a) Če polinom $p(x) = x^5 - 3x^3 - 5x$ delimo z neznanim polinomom q, dobimo kvocient $k(x) = x^3 + x^2 - 3x - 4$ in ostanek $r(x) = -6x + 4$. Določite polinom q. [Odg: $q(x) = x^2 - x + 1$]

Nastavimo enačbo, neznane koeficiente polinomov označimo s črkami, zmnožimo in izenačimo koeficiente pri členih z enako stopnjo:

$$x^5 - 3x^3 - 5x = (x^2 + ax + b)(x^3 + x^2 - 3x - 4) + (-6x + 4)$$

$$x^5 - 3x33 - 5x = x^5 + (a+1)x^4 + (a+b-3)x^3 - (3a-b+4)x^2 - (4a+3b+6)x - 4b+4$$

$$a + 1 = 0 \qquad a = -1$$

$$a + b - 3 = -3 \qquad b = 1$$

Tudi pri ostalih koeficientih se ujema, torej je $q(x) = x^2 - x + 1$.

b) Za kateri eksponent n in za katera koeficienta a in b bo imel polinom $p(x) = (ax + b)^n(2x^2 + x - 6)$ stopnjo 5, vodilni koeficient -16 in konstantni člen -162. [Odg: $n = 3, a = -2, b = 3$]

Takoj ugotovimo, da je $n = 3$. Izračunamo in izenačimo vodilni koeficient z -16, prosti pa z -162.

$$(ax + b)^3(2x^2 + x - 6) = 2a^3x^5 + \cdots - 6b^3$$

$$2a^3 = -16 \qquad a = -2, \qquad\qquad -6b^3 = -162 \qquad b = 3$$

Pokažite, da je polinom $p(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ popoln kvadrat. [Odg: $p(x) = (x^2 + 3x - 1)^2$]

Nastavimo, razvijemo desno stran in izenačimo koeficiente:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + ax + b)^2$$

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2$$

$$6 = 2a \qquad a = 3 \qquad\qquad 7 = a^2 + 2b \qquad b = -1$$

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

27. uporabiti bisekcijo za določitev realnih ničel,

    Pokažite, da ima polinom $p(x) = x^5 + 2x - 1$ *realno ničlo na intervalu* $[0, 1]$ *in da je približno* $x_0 = 0.486$.

$$p(0) = -1, \qquad p(1) = 2 \qquad c = \frac{a+b}{2} = 0.5$$

$$p(0.5) = 0.03125 > 0 \qquad c = \frac{a+b}{2} = 0.25$$

$$p(0.25) = -0.49 < 0 \qquad c = \frac{a+b}{2} = 0.375$$

$$p(0.375) = -0.24 < 0 \qquad c = \frac{a+b}{2} = 0.4375$$

$$p(0.4375) =< 0 \qquad c = \frac{a+b}{2} = 0.46875$$

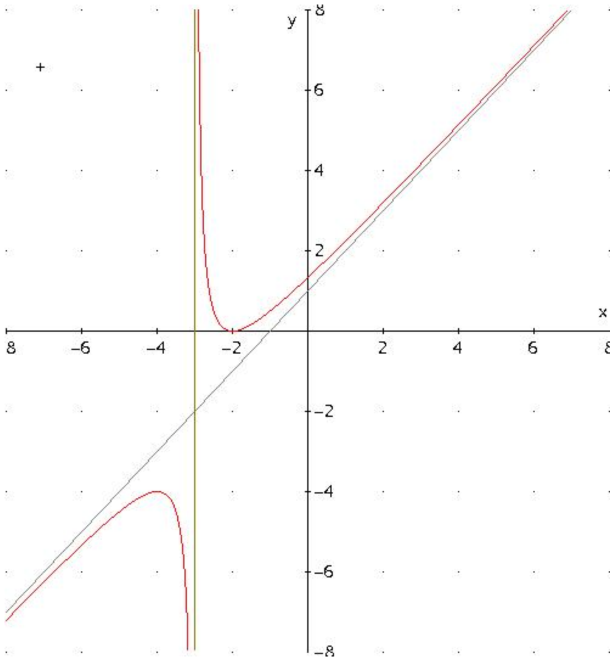
$$p(0.46875) =< 0 \qquad c = \frac{a+b}{2} = 0.484375$$

$$p(0.484375) =< 0 \qquad c = \frac{a+b}{2} = 0.4921875$$

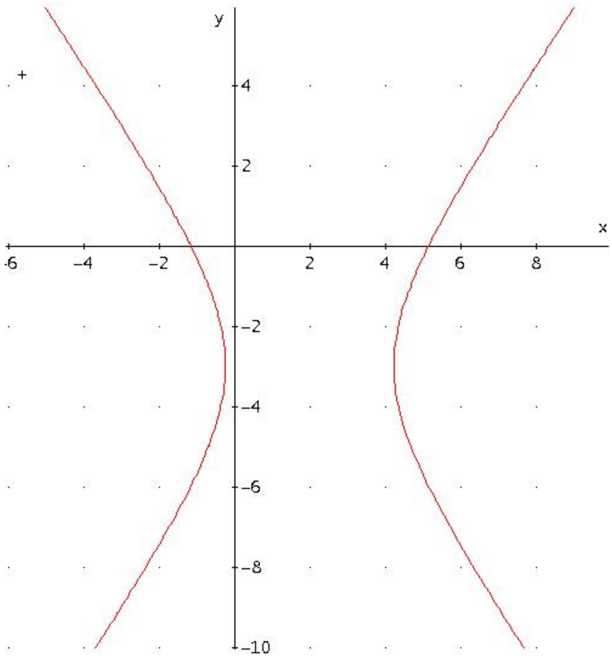
$$p(0.4921875) => 0 \qquad c = \frac{a+b}{2} = 0.48828125$$

$$\ldots$$

28. narisati graf dane racionalne funkcije s poševno asimptoto,
    Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+3}$. *Narišite graf, določite ekstreme ter* D_f *in* Z_f. *[Odg:* $E_{min}(-2, 0)$, $E_{max}(-4, -4)$, $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$, $Z_f = (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$*], poševna asimptota je premica* $y = x + 1$



29. zapisati enačbo vzporedno premaknjene stožnice,
Narišite stožnico: $9x^2-5y^2-36x-30y-54=0$ *in zapišite središče ter gorišči. [Odg:* $S(2,-3)$, $G_1(2-\sqrt{14},-3)$, $G_2(2+\sqrt{14},-3)$*]*



30. iz enačbe stožnice v premaknjeni legi zapisati koordinate temen, gorišč in središča, enačbi asimptot hiperbole, premico vodnico parabole, polosi,
Zapišite enačbi asimptot hiperbole $x^2-y^2-2x+4y-28=0$ *[Odg:* $y=x+1$, $y=-x+3$*]*

$$\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$$

Zapišite enačbo vodnice parabole in presečišči z ordinatno osjo $y^2-6x-10y-15=0$. *[Odg:* $x=-\frac{49}{6}$ $N_1(0,5+2\sqrt{10})$, $N_2(0,5-2\sqrt{10})$*]*
Enačbo preoblikujemo in dobimo: $(y-5)^2=6(x+\frac{20}{3}$. Teme je v točki $T(-\frac{20}{3},5)$. Ker je $2p=6$, je $p=3$. Enačba vodnice je $x=-\frac{p}{2}$, če je teme parabole v koordinatnem izhodišču. Sicer pa moramo upoštevati položaj novega temena, torej je enačba vodnice $x=-\frac{3}{2}-\frac{20}{3}=-\frac{49}{6}$. Za presečišče z ordinatno osjo postavimo v enačbo pogoj $x=0$.

31. z uvedbo nove neznanke rešiti enačbe, v katerih nastopajo eksponentne funkcije,
Rešite enačbo: $3^x+9^x=90$ *[Odg:* $x=2$*]*

$$3^x+(3^2)^x=90 \qquad (3^x)^2+3^x-90=0$$

Uvedemo novo neznanko: $3^x=t$ in dobimo enačbo: $t^2+t-90=0$, ki jo razstavimo na $(t+10)(t-9)=0$ z rešitvama: $t_1=-10$ $\quad 3^x=-10$ ki nima rešitve, in $t_2=9$, od koder sledi: $3^x=9$ in $x=2$.

32. uporabiti eksponentno funkcijo pri nalogah o naravni rasti,
V koliko letih se bo prebivalstvo nekega kraja potrojilo, če je naravni prirastek 8 *promil. [Odg: V približno 137 letih 3 mesecih in 27 dneh]*
$3a=a(1+\frac{0.8}{100})^n \qquad 3=1.008^n \qquad n=137.8751127$

33. preiti z ene osnove logaritma na drugo,
Rešite enačbo $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$ *[Odg: $x = 729$]*

$$\begin{aligned}
\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x &= 11 \\
\log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \frac{\log_3 x}{log_3 27} &= 11 \\
\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} + \frac{\log_3 x}{3} &= 11 \\
\ldots
\end{aligned}$$

34. z uvedbo nove neznanke rešiti enačbe (neenačbe), v katerih nastopajo logaritmi,

Rešite enačbo: a) $2\log^2 x - 5\log x = 3$, *b)* $\frac{2}{1+\log x} + \frac{1}{5-\log x} - 1 = 0$ *c)* $x^{\log x} = 10$, *[Odg:a)* $x_1 = 1000, x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}$ *b)* $x_1 = 1000, x_2 = 100$ *c)* $x_1 = 10, x_2 = 0.1$*]*

a) Uvedemo novo spremenljivko $\log x = t$ in dobimo enačbo $2t^2 - 5t = 3$, ki ima rešitvi $t_1 = -\frac{1}{2}$ in $t_2 = 3$. Iz prve dobimo $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$, iz druge pa $x = 1000$.

b) Uvedemo novo spremenljivko $\log x = t$ in dobimo enačbo $\frac{2}{1+t} + \frac{1}{5-t} - 1 = 0$, ki se poenostavi v $t^2 - 5t + 6 = 0$ z rešitvami $t_1 = 3$ in $t_1 = 2$, od koder sledi $x_1 = 1000$, $x_2 = 100$.

c) Enačbo logaritmiramo z desetiškim logaritmom in dobimo $(\log x)^2 = 1$. Id tu sledi $\log x = 1$ z rešitvijo $x = 10$ ter $\log x = -1$ z rešitvijo $x = 0.1$.

Rešite neenačbo: a) $0 < \log_3 x < 1$ *b)* $\log(x+1) < 3$ *[Odg: a)* $1 < x < 3$, *b)* $x < 999$*]*

a) Pri vseh členih neenačbe uprabimo eksponentno funkcijo 3^x. Ker je ta naraščajoča, se znak neenakosti ne spremeni: $3^o < 3^{\log_3 x} < 3^1 \qquad 1 < x < 3$

b) Delujemo z eksponentno funkcijo $10^x \qquad 10^{\log(x+1)} < 10^3$ $x + 1 < 1000 \qquad x < 999 \qquad$. Ker je $\log(x+1)$ definiran pri $x > -1$, je končna rešitev $-1 < x < 999$.

35. uporabljati logaritme pri reševanju zahtevnejših eksponentih enačb, *Rešite enačbo:* $5 \cdot 2^{2x-1} - 2 \cdot 3^{x+1} = 3^x - 2^{2x}$ *[Odg:* $x = \log 2/\log \frac{4}{3}$*]*

$$5 \cdot 2^{2x-1} + 2^{2x} = 3^x + 2 \cdot 3^{x+1}$$
$$2^{2x-1}(5+2) = 3^x(1 + 2 \cdot 3)$$
$$2^{2x-1} = 3^x$$

logaritmiramo in dobimo

$$(2x-1)\ln 2 = x \ln 3$$
$$x = \frac{\ln 2}{2\ln 2 - \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 4 - \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{4}{3}}$$

36. narisati grafe funkcij $f(x) = A\,tg(\omega x + \varphi)$, $f(x) = A\,ctg(\omega x + \varphi)$, *Narišite funkcijo* $f(x) = tg(\frac{\pi}{2} - x)$

37. rešiti trigonometrijske enačbe (s substitucijo in z uporabo polovičnih kotov); $2tg^2 x + 3\cos^{-1} x = 0$ *[Odg:* $x_1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$*]*

$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos x} = 0$$

Pomnožimo s $\cos^2 x$ (to lahko, saj tam, kjer je $\cos x = 0$, enačba ni definirana)

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

Uvedemo novo neznanko $\cos x = t$. Enačba $2t^2 - 3t - 2 = 0$ ima rešitvi $t_1 = 2$, ki odpade, ter $t_2 = -\frac{1}{2}$, ki da gornje rešitve.

$5\cos x + 12\sin x = 13$ *[Odg: $x = 2arctg\frac{2}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$]*

Uvedemo substitucijo: $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $\quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\quad \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$

Enačbo tako preoblikujemo v:

$$5(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) + 12 \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 13(\cdot\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2})$$

Enačbo uredimo in delimo s $\cos^2\frac{x}{2}$ ter dobimo:

$$9\tan^2\frac{x}{2} - 12\tan\frac{x}{2} + 4 = 0$$

$$(3\tan\frac{x}{2} - 2)^2 = 0$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{2} = arctan\frac{2}{3} + k\pi$$

$$x = 2arctan\frac{x}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

38. reševati zahtevnejše naloge iz obrestno-obrestnega računa,
Podjetje bi moralo odplačati dolg v treh enakih zaporednih letnih obrokih po 250000 SIT, prvi obrok takoj. Namesto tega je dolg poravnalo v šestih enakih letnih zaporednih obrokih, prvi obrok čez pet let. Kolikšen je novi obrok (p = 6%, letni pripis obresti. [Odg: 181862 SIT]

Narišemo premico. Prvotni obrok 250000 naj bo b, novi obrok pa a. Izenačimo vsa prvotna odplačila z novimi in dobimo enačbo:

$$br^{10} + br^9 + br^8 = ar^5 + ar^4 + ar^3 + ar^2 + ar + a$$
$$br^8(r^2 + r + 1) = a\frac{r^6 - 1}{r - 1}$$

Od tu lahko že izračunamo a (vstavimo $b = 250000$ in $r = 1.06$) in dobimo $a = 181862 SIT$. Enačbo pa lahko (če želimo) še malo poenostavimo in dobimo: $a = \frac{br^8}{r^3+1}$.

39. določiti limito danega konvergentnega zaporedja,
Določite limito zaporedja: $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{13}{16}, \frac{9}{11}, \cdots$ *[*$\frac{5}{6}$*]*

40. računati z limitami,
Izračunajte limite: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{-2n^2+3n-2}$ *b)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$
c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *[Odg: a)*$-\frac{1}{2}$*, b)* $\frac{3}{2}$*, c)* e^{-1}*]*

41. izračunati pogojno verjetnost,
Kolikšna je verjetnost, da na dveh kockah v prvem metu vržemo vsoto 9 ali - če se to ni zgodilo, v naslednjem metu vsoto 7? [Odg: $\frac{4}{36} + \frac{32}{36} \cdot \frac{6}{36}$*]*
Verjetnosti, da posamezen strelec zadene tarčo, so po vrsti $\frac{1}{6}$*,* $\frac{1}{4}$ *in* $\frac{1}{3}$*. Ko so vsak po enkrat ustrelili proti tarči, je bila ta natanko enkrat zadeta. Izračunajte verjetnost dogodka, da jo je zadel prvi strelec! [Odg:*$\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}\frac{3}{4}\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\frac{1}{4}\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{3}}$*]*

42. izračunati limito funkcije v dani točki z uporabo pravil,

43. izračunati enostavne posebne primere limit funkcij,
Izračunajte limite: a) $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ *b)* $\lim_{x\to\infty}(x(\sqrt{x^2+1} - x))$ *c)* $\lim_{x\to0} \frac{tg5x}{x}$ *č)* $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ *d)* $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ *e)* $\lim_{x\to5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$
[Odg: a) $-\frac{2}{5}$*, b)* $\frac{1}{2}$*, c)* 5*, č)* $\frac{1}{2}$*, d)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e)* $-\frac{1}{40}$*]*

44. poiskati tiste x, pri katerih dana funkcija $x \mapsto f(x)$ ni zvezna,
Določi parameter a tako, da bo dana funkcija $f(x)$ zvezna: [Odg: $a = -\frac{\pi}{4}$]

$$f(x) = \begin{cases} \ln x^2, & x \leq 1 \\ arctgx + a, & x > 1 \end{cases}$$

Obe funkciji izenačimo pri $x = 1$: $arctg1 + a = ln1$ $\quad \frac{\pi}{4} + a = 0$

45. reševati ekstremalne probleme,
Katera točka na paraboli $y = x^2 + x + 2$ je najbližja točki $T(1, 1)$ [Odg.: $P(0, 2)$]

Točka na paraboli je $A(x, x^2 + x + 2)$, $T(1, 1)$.

$$d(T, A) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2 + x + 2 - 1)^2}$$

$$d(T, A) = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x}$$

$$d(T, A) = \sqrt{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2}$$

Odvajamo (lahko bi tudi kvadrirali, saj se koordinata x ekstrema ne bi spremenila!

$$d' = \frac{4x^3 + 6x^2 + 8x}{2\sqrt{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2}}$$

Iz $d' = 0$ sledi $4x^3 + 6x^2 + 8x = 0$, ki ima edino rešitev $x = 0$. Torej je iskana točka $T(0, 2)$.

46. z uporabo odvoda oceniti spremembo vrednosti funkcije,
Ocenite vrednost $(2.01)^3$

Uporabimo formulo:

$$f(x_1 + h) \approx f(x_1) + f'(x_1)h$$

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad x_1 = 2, \quad h = dx = 0.01$$

$$f(2) = 8, \quad f'(2) = 12$$

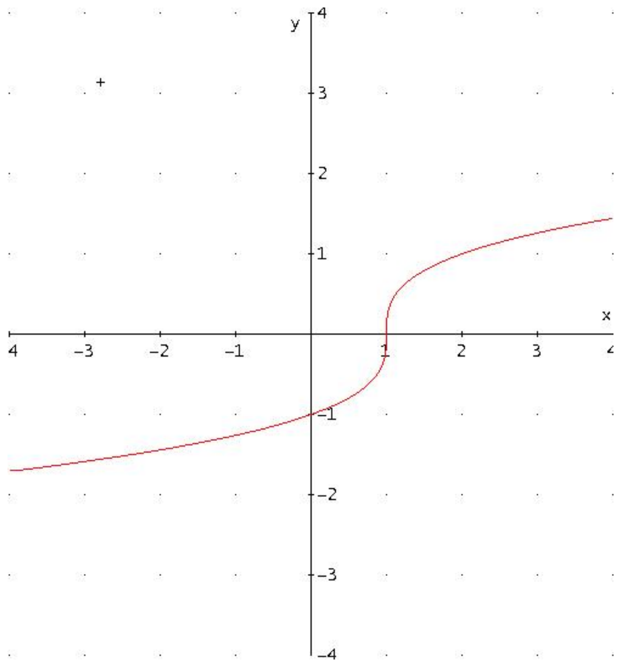
$$(2.01)^3 \approx 8 + 12 \cdot 0.01 = 8.12$$

47. izračunati odvod implicitno dane funkcije, *Zapišite enačbo tangente na krivuljo $3x^2 + 4y^2 = 12$ v točki $T(1, -\frac{3}{2})$.* Izračunamo $y = -\frac{3}{2}$. Odvod je enak $6x + 8yy' = 0 \qquad y' = -\frac{3x}{4y} \qquad k_t = y'(T) = \frac{1}{2}$
Enačba tangente je: $y = \frac{1}{2}x + 2$

48. uporabljati uvedbo nove spremenljivke pri računanju nedoločenega in določenega integrala,

49. izračunati prostornino rotacijskega telesa.

Lik med krivuljo $y^3 = x - 1$ in koordinatnima osema zavrtimo okrog x-osi. Izračunajte prostornino!



Formula za izračun prostornine telesa, ki jo dobimo z vrtenjem krivulje okrog x-osi za 360^o je:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

V konkretem primeru je funkcija $y = \sqrt[3]{x-1}$, zato je $y^2 = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

$$\pi \int_0^1 (\sqrt[3]{(x-1)^2}) dx =$$

Običajno je lažje, da najprej posebej izračunamo nedoločeni integral. Če v določeni integral vpeljemo novo spremenljivko, moramo spremeniti meje integriranja. Če pa posebej izračunamo nedoločeni integral, potem nadaljujemo z računanjem določenega integrala po spremenljivki x.

$$\int (\sqrt[3]{(x-1)^2}) dx =$$

$$x - 1 = t \quad dx = dt$$

$$= \int (\sqrt[3]{t^2}) dt = \int t^{\frac{2}{3}} dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} (x-1)^{\frac{5}{3}}$$

Nadaljujemo z računanjem določenega integrala.

$$\pi \int_0^1 (\sqrt[3]{(x-1)^2}) dx = \pi \frac{3}{5} (x-1)^{\frac{5}{3}} |_0^1 = -\pi \frac{3}{5}$$

Torej je prostornina enaka $V = \frac{3\pi}{5}$

OPOMBA: kadar zavrtimo okrog kakšne stranice geometrijski lik, računamo prostornino po formulah z aprostornine geometrijskih teles in ne z integrali. Na primer: zavrtimo trapez ($a = 8cm$, $b = 5cm$, $c = 4cm$, $d = 6cm$ okrog stranice a in izračunajmo prostornino nastalega telesa. Dobljeno telo je valj + dva stožca. Višina trapeza v je polmer osnovne ploskve valja oziroma obeh stožcev. Izračunamo jo tako, da izračunamo najprej kot α (naredimo vzpřednico skozi C k stranici d in v trikotniku $a-c$, b, d uporabimo kosinusni izrek. Tako je $v = d\sin\alpha$. Označimo še višini stožcev s h_1 in h_2. Tako je:

$$V = \pi v^2 c + \frac{\pi v^2 h_1}{3} + \frac{\pi v^2 h_2}{3} = \pi v^2 c + \frac{\pi v^2}{3}(h_1+h_2) = \pi v^2 c + \frac{\pi v^2}{3}(a-c) = \cdots$$