

Seminarska naloga

Cela števila

Število

Število je matematični pojem, s katerim opisujemo množino.

V Vsakdanji rabi so najbolj znana naravna števila
 $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots \}$, s katerimi štejemo.

Skupnost vseh naravnih števil določa množico, ki jo običajno označujemo z **N**.

Če k tej množici pridružimo še negativna števila, dobimo množico celih števil **Z**.

Količnik celih števil so racionalna števila ali ulomki, katerih množico označimo z **Q**.

Če vključimo še vse neskončne in neponavljajoče decimalne zapise števil, dobimo realna števila **R**.

Tista realna števila, ki niso racionalna, so iracionalna. Realna števila lahko naprej razširimo še na kompleksna števila **C**, s katerimi lahko rešimo vse algebrske enačbe.

Vse rešitve algebrskih enačb, katerih koeficienti so kompleksna števila, so spet kompleksna števila. Vsaka omenjena množica je podmnožica naslednje:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} .$$

Števila moramo ločiti od številčk, ki so posebni znaki za predstavitev številčk. Zapis števil kot niz številčk obravnavajo številski sestavi.

Razširitev

Nov razvoj je prinesel hiperrealna števila in surrealna števila, ki

razširijo realna števila z dodajanjem neskončno majhnih in neskončno velikih števil.

Namesto poljubno neskončno dolgih decimalnih zapisov desno za decimalno vejico, ki vodijo od racionalnih do realnih števil, lahko dopustimo neskončne decimalne zapise levo od decimalne vejice, kar nas pripelje do p-števil.

Ordinalna števila in kardinalna števila so posplošitev naravnih števil za merjenje velikosti neskončnih množic.

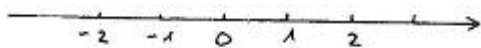
Aritmetične operacije, kot sta dvočleni operaciji seštevanja in množenja, posplošimo v matematični veji abstraktne algebre. S tem dobimo algebrske strukture grupo, kolobar in polje.

Celo Število

- Cela števila so : $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

- Označimo jih z $Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- Uvedemo jih, saj pri odštevanju naravnih števil ne dobimo zmeraj naravno število : $a - b$ je naravno le, če je a večji od b
- Odštevanje na številski premici :
Ko je b večji od a pridemo levo od točke 0.

* Narišimo si cela števila na številski osi



* Cela števila so sestavljena iz naravnih števil , števila 0 in negativnih naravnih števil ($-1, -2, -3, -4, \dots$)
Pravimo da je $-n$ nasprotno število k n . Velja $n - n = 0$

* Znak minus ima trojni pomen :

- znak za odštevanje ($7 - 4 = 3$)
- predznak števila (-3)
- prehod k nasprotni vrednosti ($-(-3) = 3$)

Množica celih števil, je običajno označena kot **Z** (nemško Zahlen. število) je določena kot množica ekvivalenčnih razredov urejenih parov naravnih števil **N** x **N** z ekvivalenčno relacijo $(a, b) \sim (c, d)$, pri kateri velja:

$$a + b = b + c$$

Dvočleni aritmetični operaciji seštevanja in množenja celih števil sta določeni z :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

Običajno razred (a, b) označimo z znakom n , če velja $b \leq a$ in -

n ,

če je $a \leq b$, kjer je n poljubno naravno število, da velja

$$a = b + n \quad \text{in} \quad a + n = b.$$

S takšnim zapisom cela števila tvorijo znano množico

$\{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$.

Nekaj primerov:

$$0 = \text{ekvivalenčni razred } (0, 0) = \text{ekvivalenčni razred } (1, 1) = \dots$$

$$1 = \text{ekvivalenčni razred } (1, 0) = \text{ekvivalenčni razred } (2, 1) = \dots$$

$$-1 = \text{ekvivalenčni razred } (0, 1) = \text{ekvivalenčni razred } (1, 2) = \dots$$

Množica celih števil je tako sestavljena iz množice naravnih števil

$\mathbf{N}$, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ in množice negativnih celih števil $\{\dots, -3, -2, -1\}$.

Množica celih števil je najmanjša grupa, ki vsebuje naravna števila.

Množica celih števil $\mathbf{Z}$ s seštevanjem in množenjem ($\mathbf{Z}$, $+$, $-$) tvori popolni obseg.

Množica ($\mathbf{Z}$, $+$, $-$), v kateri veljajo običajne aritmetične operacije, je urejen kolobar :

$$(a, b) \leq (c, d) \in \mathbf{Z}, \text{ če je } a + d \leq b + c \in \mathbf{N}$$

Vsa števila, ki so večja od 0 so pozitivna. Množica celih števil je števno neskončna, podobno kot je množica naravnih števil, ki jo vsebujejo.

Množica celih števil ne tvori polja, ker na primer ni takšnega celega števila, da bi veljalo $2 \cdot x = 1$. Najmanjše polje, ki vsebujejo cela števila je množica racionalnih števil.

Tudi cela števila kot naravna števila imajo pomembno lastnost delitve z ostankom. Če imajo dve celi števili a in b , $b \neq 0$, lahko vedno najdemo takšni dve celi števili k in l , da bo veljalo :

$$a = b \cdot k + l \quad \text{in} \quad 0 \leq l < |b|.$$

Število k se imenuje *količnik* (*kvocient*) in število l *ostanek* deljenja števila a s številom b . Števili k in l sta enolično določeni z a in b . S takšno delitvijo lahko z Evklidovim algoritmom izračunamo največji skupni delitelj. Največji skupni delitelj dveh celih števil lahko vedno zapišemo kot vsoto mnogokratnikov dveh števil.

Na ta način je množica $\mathbf{Z}$ Evklidov obseg. To pomeni, da je $\mathbf{Z}$ osnovni idealni obseg in lahko cela števila zapišemo kot produkt praštevil na natanko en način. To je osnovni izrek aritmetike. S celimi števili se kot veja matematike ukvarja teorija števil.

Celo število je ponavadi eno izmed preprostih podatkovnih tipov v računalniških jezikih ponavadi z dolžino 8, 16 ali 32 bitov. Cela števila se ponavadi uporabljajo kot indeksi vektorskih polj («array«).

Računski zakoni

Vsota dveh celih števil a in b je zmeraj celo število $a + b$.

Lastnosti seštevanja :

komutativnost seštevanja $- a + b = b + a \dots$
($3 + 5 = 8 = 5 + 3$)

asociativnost seštevanja $- a + (b + c) = (a + b) + c$
($-2 + (5 -4) = (-2 + 5) -4 = -1$)

0 je nevtralen element za seštevanje $- a + 0 = a$
($9 + 0 = 9$)

-a je nasprotno število števila a $- a + (- a) = 0$
(nasprotno število k 3 je -3)

Trditve :

1.) Če številu prištejemo nasprotno število je vsota 0.
2.) Če je $a + b = 0$, je b nasprotno število števila a.
3.) Nasprotno število k -a je a ($- (- a) = a$) in velja $-a + a = 0$
4.) Nasprotno število k ($a + b$) je $-a + (-b)$. ($- (a+b) = -a + (-b)$)

Števila :

	Seštevanje	Množenje
Komutativnost (zamenljivost)	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$

Asociativnost (združevanje)	$(a+b) + c = a + (b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivnost (razčlenitev)	$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	
Nevtralno število	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Obratni / Inverzno število	$a + (-a) = 0$	$a \cdot a^{-1} = 1, a \neq 0$

Urejenost :

Za poljubni števili a in b velja ena od treh možnosti

$$\underline{a < b} \quad \text{ali} \quad \underline{a = b} \quad \text{ali} \quad \underline{a > b}$$

Velja :

$$\underline{a < b} \quad \text{in} \quad \underline{b < c} \quad \text{potem pa} \quad \underline{a < c}$$

Uporabljajo se še naslednje oznake:

1. $a \leq b$: a je manjše ali enako b (negacija izjave $a > b$)
2. $a \geq b$: a je manjši ali enako b (negacija izjave $a < b$)
3. $a \neq b$: a ni enako b (negacija izjave $a = b$)

Računanje :

1. Naj bo $a < b$ in c poljubno število. Potem je $a + c < b + c$
2. Naj bo $a > 0$ in $b > 0$. Potem je $a \cdot b > 0$.