

FRAKTALI

Da obstaja na Svetu mnogo zapletenega, čudežnega a hkrati tudi nepredstavljivega vemo že dolgo. In to definicijo dobi tudi fraktal. Fraktal je za nas nedoumljiva in zapletena stvar, vendar je pot, ki vodi do njega čisto lahka. Izpeljana je iz logike, ki pa je navsezadnje "samo kmečka pamet". Če bi naredili najbolj preprosto definicijo fraktala, bi se glasila nekako takole:

Fraktal je nekaj kar se ponavlja v neskončnost. Nekaj, kar se nikoli ne konča in se spreminja z istim procesom znova in znova.

Ko so geometrijski liki, in njihovo spreminjanje še vidni očem, je vse v najlepšem redu. Ko pa se mora to nadaljevati v mislih, pa nemalokrat pride do zapletov. In to je podobno kot velikost vesolja, ali atoma. Za nas enostavno nepredstavljivo. In ta nepredstavljivost je botrovala, da so matematike s takimi hipotezami, ki so živeli konec 19. in v začetku 20. stoletja, imeli takorekoč za bedake in da je fraktal le plod domišljije in pojav brez vrednosti. To so na svoji koži občutili kar nekateri.

Če pogledamo bolj zapleteno definicijo fraktala, spoznamo da je to tema o kateri bi se dalo razpravljati in o njej premišlevati celo življenje. A to se za enkrat še ne izplača, saj uporabnost, ki jo dajejo fraktali ni na tako visoki ravni kot recimo pitagorov izrek, množenje ali pa število Π (pi). Realnost. Mi uporabljamo za osnovno geometrijo evklidsko geometrijo - to je navadna geometrija, ki jo pretežno uporabljamo. Nekaterih reálnih stvari na Svetu, če gledamo čisto do potankosti, pa ne moremo razložiti s to evklidsko geometrijo. Tej nalogi ni kos niti študij oblik, prav tako pa odpade neevklidska geometrija - hiperbolična in eliptična geometrija. Zato na sceno vstopi t.i. fraktalna geometrija.

PRVI FRAKTAL

Za prvi znani fraktal danes velja Cantorjev prah, ki je dobil ime po njegovem odkritelju nemškemu matematiku Georgu Cantorju, ki ga je objavil l. 1883. Ta fraktal je eden izmed najlažjih in vsaj jaz sem na njem najlažje razumel pojem fraktal. Cantorje prah sestavimo s preprostim rekurzivnim postopkom. ačnemo s poljubno izbrano daljico, ki pa ima končno dolžino. Le-to razdelimo na tri enake dele, pri tem pa še odstranimo srednjo od dobljenih daljic, obeh krajnih daljic pa ne premikamo ali spreminjamo. Ta isti postopek zopet uporabimo na dobljenih dveh daljicah, ki nam pri vsaki da štiri nove, krajše daljice. Postopek ponavljamo v nedogled, v neskončnost.

Množica, proti kateri nas pelje ta ponavljajoči se postopek je točkasta, vsebuje samo točke. Ta množica je Cantorjev prah. To je fraktal. Če to vse izračunamo na podlagi računa:

X - dolžina daljice

n - stopnja

$$X_1 = 1 \quad X_2 = \frac{2}{3} \text{ (ko srednja odpade)} \quad X_3 = \frac{4}{9} \text{ (3. faza } \Rightarrow 4 \text{ daljice)}$$

iz tega sledi splošna formola za dolžino nastalih daljic:

$$X_n = \frac{2}{3} \cdot X_{n-1}, \text{ kar pa je enako } \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Torej, če vse izračunamo na podlagi računa, dobimo, da je skupna dolžina vseh Cantorjevih drobcev enaka nič. To pomeni da je dolžina daljice enaka nič. Ta fraktal je kljub svoji preprostosti pomemben fraktal in je osnova mnogih drugih fraktalov, med drugim tudi Kochove snežinke.

KOCHOVA SNEŽINKA

Kochova snežinka je še en fraktal iz preloma 19. in 20. stoletja. L. 1904 je švedski matematik Helge von Koch predstavil lik, ki se ga je oprijelo ime Kochova snežinka zaradi njegove razvejane oblike in je fraktal. Koch je dobil lik na naslednji način: najprej vzameš enakostranični trikotnik s poljubno dolžino stranic. Nato ta trikotnik prekriješ z enakim a okoli obrnjenim trikotnikom. Potem to narediš na vsakem trikotniku in trikotničku, ki ga dobiš v prejšnji stopnji in tako se tudi tu nadaljuje v neskončnost. Na skici je primer za prve štiri stopnje fraktala:

Kochova snežinka pa se razlikuje od Cantorjevega prahu. Če smo pri daljici merili dolžino, ki nastane, pri snežinki merimo obseg lika. Če vzamemo, da je dolžina stranice enakostraničnega trikotnika 1, da je K obseg lika, n pa stopnja oziroma faza, lahko iz tega dobimo nekaj podatkov:

$$K_1 = 3 \quad K_2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \quad K_3 = 3 \cdot \frac{16}{9}$$

Iz tega izhaja enačba oziroma formula za splošen obseg:

$$K_n = \frac{4}{3} \cdot K_{n-1} \quad \text{kar pa je enako } 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

In že iz tega zgoraj napisanega lahko razberemo, da ima ta fraktal neskončen obseg, saj obseg K narašča z vrednostjo števila n.

Pri tem liku pa se da izračunati še eno stvar in se z njo prepričati v neskončnost. To je ploščina.

Prav pri Kochku je znanost sprejela njegovo odkritje kot bizaren domislek in čista domišlija. Zaradi lastnosti lika, ki so bile za tedanjo znanost nenavadne in čudne, se je fraktala oprijelo ime oziroma oznaka "patološka krivulja". Toda čez devedeset let je krivulja dobila pomembno mesto tako v "višji", kot v uporabni matematiki.

TRIKOTNIK IN PREPROGA

Naslednji znanstvenik, ki je odkril nov fraktal je bil poljski matematik Waclaw Sierpinski. Ta je leta 1915 odkril nov fraktal. Tudi on je za izhodišče vzel enakostranični trikotnik, vendar je nadaljeval po drugi poti. V začetni lik je na sredo postavil prav tako enakostranični trikotnik, ki je obrnjen in ki zajema srednjo četrtno lika. Ta košček odpade, ostanejo pa še trije enakostranični trikotniki, v katerih ves postopek ponovi in tako se počasi tvori na kupe trikotničkov, ki jih deliš še naprej in naprej. Ta fraktal so poimenovali kar "Trikotnik Sierpinskega". Na sliki so narejene prve štiri faze:

Že na pogled se vidi, da ostaja čedalje manj lika. Če vzamemo, da je T ploščina trikotničkov, n pa stopnja v kateri je lik, lahko za računi sklepamo naslednje:

$$T_1=1 \qquad T_2=3/4 \qquad T_3=9/16 \qquad \text{itd}$$

Iz tega lahko izpeljemo splošno formulo, ki gre takole:

$$T_n=3/4 T_{n-1} \qquad \text{kar pa je popolnoma enako } (3/4)^{n-1}$$

Ploščina trikotnika je torej, kakor sledi iz računa, nič.

Sierpinkin je naredil še en zelo podoben fraktal, ki se razlikuje od njegovega trikotnika le po tem, da je osnova lik kvadrat. Od zanimive oblike prihaja tudi ime "Preproga Sierpinskega". Podobno kot pri trikotniku, se na podoben način tudi pri tem fraktalu dokaže, da je ploščina lika nič. Za lažjo presdtavo sen nalimal tudi skico prvih štirih faz:

PREHOD V "3D"

Naslednji pomemben fraktal, ki pa je prvi trodimenzionalen lik že na samem začetku. Ta fraktal je odkril avstrijski matematik Karel Menger in je tridimenzionalna izpeljanka preproge Sierpinskega. Kocko razdelimo na sedemindvajset manjših kockic in poberemo ven sedem srednjih. Zatem ponavljamo postopek v ostalih dvajsetih kockah in po neskončno fazah dobimo fraktal, ki je dobil ime Mengerjeva goba. Stranska ploskev nastalega lika je preproga Sierpinskega. Po nekaj računih in logičnih sklepanjih dobimo podatek, da je prostornina tega fraktala zopet nič. Telo po nekaj fazah:

FRAKTALNA GEOMETRIJA

Naslednji fraktali, ki jih je odkril Mandelbrot, predstavljajo začetek fraktalne geometrije. V začetku sedemdesetih let tega stoletja je francoski matematik poljskega rodu Benoit Mandelbrot, začel objavljati prve rezultate svojih raziskav s področja fraktalov. Svojo knjigo o fraktalih, ki jo je izdal leta 1975, je začel z vprašanjem koliko je dolga britanska obala. Ugotovil je, da je meritev odvisna od natančnosti in če hočemo, da je le-ta neizmerno velika, odgovora na dolžino sploh ni. Vsak košček obale je celota nekaterih drugih delcev in lt-ti so zopet le celota drugih, šr manjših delcev. In ker se to ponavlja v neskončnost, jo je v celoti nemogoče izmeriti. Mandelbrot je bil prvi, ki je naredil bolj natančno definicijo fraktalov.

DELITEV FRAKTALOV

Do njegovega časa so odkrivali bolj enostavne fraktale, ki jih je Mandelbrot poimenoval za t.i. linearne fraktale. Štos teh je, da pri poljubni povečavi vidiš še vedno isto kot na začetku. Ker pa sta v letih po prvi svetovni vojni odkrivala fraktale še dva matematika in ker so bili le-ti kar dosti drugačni

od ostalih, pa je on odprl novo skupino, ki jo je poimenoval za t.i. nelinearne fraktale. Pri teh pa pri poljubni povečavi ni nujno da vidimo tisto, kar je na začetku. Ta dva matematika sta bila Francoza Gaston Julia in Pierre Fatou. Njuni fraktali so se močno razlikovali od prejšnjih. To in pa dejstvo, da je bil Julia Mandelbrotov učitelj, je spodbudilo slednjega, da se je tudi on posvetil tej zanimivi zvrsti.

Francoza sta za svoje teorije porabila enačbo, ki se glasi:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

kjer je C konstanta iz množice kompleksnih števil, z pa spremenljivka. In nekatere rešitve in kombinacije spremenljivk so poimenovali Juliajeva množica. Te množice so med najbolj znanimi in najbolj zanimivimi fraktali fraktali, toliko različnih pa dobiš le, če spreminjaš konstanto ali spremenljivko v prej omenjeni enačbi:

MANDELBROTOVA MNOŽICA

Mandelbrot pa je v drugi polovici sedemdesetih let nadaljeval delo francoskih matematikov in kot plod tega dela je okoli leta 1980 nastal najbolj znan fraktal Mandelbrotova množica.

Že na pogled se nam ponuja dokaj lepa oblika, iz katere pa "izrašča" nešteto majhnih "repkov" in dokazati, da je ta množica fraktal je bilo zelo težko. To je uspelo šele japonskemu matematiku Shishikuri, ki je to dokazal šele leta 1991.

↗ Ta slika prikazuje eno izmed Mandelbrotovih množic, ki ima enačbo:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C.$$

No, to pa je še ena od Mandelbrotovih množic. Ta pa ima enačbo:

$$Z_{n+1} = Z_n^4 + C \quad \searrow$$

Še bolj znana kot Mandelbrotova množica sama, je slika povečave njegove množice, ki je znana po celem svetu in je za večino ljudi prva asociacija ob besedi fraktal. To je to: ↘



Meni osebno je najbolj všeč serija slik iz Matematičko fizičkega lista, ki v nekaj potezah poveča Mandelbrotovo množico do čiste nerazpoznavnosti. Če se še tako trudim, si ne morem zamisliti, kolikšen delec celotnega fraktala je recimo črna iglica na zadnji sliki.



Kakor mi je všeč
povečava fraktala, so mi
všeč tudi cele množice,
ki imajo zanimivo obliko.
Med mojimi najljubšimi
oblikami so fraktali v
obliki praproti in
zgledajo tako realistični.



Zelo so zanimive
množice, ki so v
neskončnost razvejane,
kot kakšne čudne
rastline.



DIMENZIJE FRAKTALOV

Priznati pa moram, da me zelo presenetilo in hkrati na nek način tudi očaralo, ko sem si prebral veliko o dimenzijah fraktalov. Kot vemo ima točka dimenzijo nič, premica oziroma črta ima dimenzijo ena, ravnina ima dve dimenziji, vsa telesa pa imajo tri dimenzije. Fraktali pa imajo dimenzije nekje vmes, saj vemo da dimenzijo zračunamo s tem, da damo dva logaritma v ulomek.

Recimo Cantorjev prah, za katerega velja splošna formula:

$$X_n = \frac{2}{3} \cdot X_{n-1}$$

in iz tega sledi, da je dimenzija prahu:

$$\frac{(\log 2)}{(\log 3)} = \mathbf{0.6309...}$$

Zanimiva je tudi dimenzija kochove snežinke:

$$K_n = \frac{4}{3} \cdot K_{n-1}$$

iz tega vidimo, da je dimenzija snežinke:

$$\frac{(\log 4)}{(\log 3)} = \mathbf{1.2618...}$$

Pa tudi trikotnik Sierpinskijskega:

$$\frac{(\log 3)}{(\log 2)} = \mathbf{1.5849...}$$

in njegova preproga sta zanimivi:

$$\frac{(\log 8)}{(\log 3)} = \mathbf{1.8928...}$$

Pri Mengerjevi gubi je dimenzija fraktala manjša kot začetna 3:

$$\frac{(\log 20)}{(\log 3)} = \mathbf{2.7268...}$$

Mandelbrotova množica pa ima fraktalno dimenzijo 2, kar je ugotovil tisti kamikaze.

Literatura:

Viljko Domanjko - fraktali, GEA september 1998

Matematični priročnik, Tehniška založba Slovenije 1997

France Križanič - temelji realne matematične analize, DZS 1990

Matematički fizički list, ZSJ (založba sa juga) -?