|  |  |
| --- | --- |
|  | Fraktali |
| **Fraktali? Kaj pa je to?** | Na to vprašanje lahko odgovorimo na podlagi matematike, jih primerjamo z naravnimi oblikami, ali kot umetniške podobe - nekaj nenavadnega, kot produkt čedalje hitreje razvijajoče se računalniške tehnologije in matematičnih algoritmov. Nekaj razlag zgoraj navedenih “teorij”: "*Fraktal je geometrijski vzorec, ki se ponavlja v vedno manjši obliki, da bi ustvaril nepravilno obliko in površino, katera ne more biti opisana v klasični geometriji.* Fraktali se uporabljajo za računalniško modeliranje nepravilnih vzorcev in struktur v naravi.""*Fraktali so krasni, očarljivi vzorci neskončnih struktur in zapletenosti.* Fraktal je *matematični objekt*, ki ima podrobno strukturo neodvisno kako blizu ga gledamo ali kolikokrat ga povečamo.""Fraktali so jezik, ki opisuje geometrijo. *Evklidova geometrija je opis črt, krogov, elips itd.,* *fraktalna geometrija pa je opisana v algoritmih - to je skupek navodil, kako narediti fraktal.* Računalniki pa prevedejo ta navodila v čudovite vzorce, katere vidimo kot fraktalne slike." "Fraktal je geometrijska oblika, ki je podobna sama sebi pri različnih velikostih (povečavah). 🡪 *Oblika fraktala bo izgledala približno, ali pa celo točno, enaka neodvisno v kateri velikosti je gledana.*" "Fraktal je geometrijska oblika, ki je sama sebi podobna (simetrična) in neomejena glede mer. *Fraktal je oblika, ki je lahko deljena v delce, in ti delci deljeni v manjše kopije originalne oblike.* Če ste že videli oblak, ste videli fraktal. Fraktali so v naravnih oblikah vsepovsod okoli nas. Drevo ima veje, iz vej rastejo manjše vejice in iz njih še manjše. Drevo je zelo enostaven fraktal. Obstajajo pa tudi neskončno zapleteni fraktali."A z navedenimi teorijami se spisek teorij še ne dokonča, saj obstajajo tem podobne. **Fraktal je grafična rešitev matematične enačbe ali algoritma v kompleksi ravnini**. To pa lahko izgleda kot slika kakšnega modernega slikarja, lahko pa se izkaže kot slika iz narave. Poleg lepote pa fraktali ponujajo tudi matematično razlago narave. Med fraktale v naravi spadajo tudi gore, obale, oblaki, drevesa in grmi ter veliko ostalih rastlin. Fraktali so matematična rešitev naravnih oblik in obenem tudi umetnost na podlagi matematike. Fraktali omogočajo ustvarjalcem kreirati imaginarne pokrajine na računalniku. Marsikatero ozadje v filmu je ustvarjeno s pomočjo “fraktalne grafike”. |
| **Zgodovina** | Matematika **Abrecht Durer** (1471-1528) in **Helge von Koch** (1870-1924) sta bila prva, ki sta konstruirala fraktal iz serije ponavljajočih se matematičnih likov. Durer je konstruiral iz peterokotnikov in Koch iz trikotnikov. To je bila *doba linearnih fraktalov*, vendar linearni fraktali niso zadoščali iskanju matematične rešitve naravnih oblik, saj niso bili dovolj natančni. *V dvajsetih letih je* **Gaston Julia** *razvil teorijo, da je* *fraktal možno konstruirati kot graf v kompleksni ravnini.* Vendar takrat še ni bilo primerne tehnologije, s katero bi lahko izračunali več milijonov računov potrebnih za konstruiranje enega fraktala. Zaradi tega je njegova teorija padla v pozabo, vse do sedemdesetih let, ko je **Benoit Mandelbort**, matematik zaposlen pri IBM, nepričakovano naletel na Julijeve raziskave. Slika - Mandelbort set 1975Mandelbort je s pomočjo računalnika prvi generiral fraktal v kompleksni ravnini leta 1975 (slika). On je tudi poimenoval te matematične oblike z imenom **FRAKTALI**. Začela se je doba nelinearnih fraktalov in Mandelbort je postal njen oče . Po njem je tudi poimenovan **Mandelbortov fraktal**, katerega osnova je kompleksna enačba **z=z\*z+c** in je obenem tudi temelj vseh ostalih fraktalov. **Benoit Madelbort**Rojen je bil na Poljskem leta 1924 v družini z akademsko tradicijo. Že ko je bil zelo mlad, sta mu njegova strica “predstavila” matematiko.Njegova družina se je izselila v Francijo leta 1936 in tako je njegov stric – Szolem Mandelbrojt, ki je bil profesor matematike na College de France, prevzel odgovornost za njegovo izobrazbo. S pomočjo računalniške grafike je Madelbrot, ki je delal pri IBM Watson Raziskovalnem centru, lahko prikazal, da je delo Julia izhodišče za nekatere najlepše fraktale znane do danes. Da je lahko to naredil, je moral razviti ne samo nove matematične ideje, temveč tudi ene izmed prvih računalniških programov za izpis grafike.23. junija 1999 je Mandelbrot prejel Honorary Degree of Doctor of Science od Univerze St. Andrews-a. Mandelbrot je prejel številne nagrade v znak njegovih dosežkov. Na primer: 1985 leta je dobil nagrado 'Barnard Medal for Meritorious Service to Science'. Naslednjega leta je dobil “the Franklin Medal”. Leta 1987 je bil počaščen z nagrado Alexander von Humboldt, leta 1988 je prejel the Steinmetz Medal. Leta 1991 je prejel the Nevada Medal in Wolfovo nagrado za fiziko leta 1993. |
| **Delitev (÷)** | Deljenje fraktalov: - **linearni**, katerih osnova je linearna geometrija (bazirajo na ravnih črtah) in - **nelinearnifraktale**, ki imajo osnovo v kompleksni matematiki.V nadaljevanju bom ti dve veji fraktalov tudi predstavil. |
| **Linearni fraktali** | Linearni fraktali slonijo na lomljenju ravnih črt in Evklidovi geometriji. Generirajo se na več načinov in sicer z: - dodajanjem, - lomljenjem, - preoblikovanjem daljic ali geometrijskih likov. Dober primer za generiranje linearnih fraktalov je generiranje Kochovega trikotniškega otoka, katerega izhodišče je trikotnik. To pa dobimo tako, da na sredino vsake stranice enakostraničnega trikotnika postavimo nove enakostranične trikotnike, katerih stranica je dolga tretjino stranice prvotnega trikotnika. Na vseh stranicah dobljene šest krake zvezde postavimo manjše nove enakostranične trikotnike z tretjino manjših dimenzij kot predhodniki. Če opisani algoritem ponavljamo v nedogled, dobimo lik, ki je omejen s tremi neskončno dolgimi Kochovimi trikotniškimi krivuljami. Obseg lika je neskončen, vendar ima lik končno ploščino, ki jo lahko izračunamo in je manjša od ploščine očrtanega kroga izhodiščnemu trikotnika. Spodaj je slika “izdelave” dela Kochovega trikotniškega otoka, Kochova trikotniška krivulja. Kochova trikotniška krivulja Modernejši linearni fraktali so že malce bolj zapleteni, saj so poleg lomljenja črt dodane še barve, zaradi česar jih nekateri uvrščajo na prehod linearnih fraktalov v nelinearne. Spodaj je najbolj značilen moderni linearni fraktal, ki je imenovan po svojem izgledu, praprot. Linearni fraktal praprot  Povečava praproti  Linearni fraktali so zelo omejeni glede oblike in velikosti, primer sta sliki praproti, kjer lahko vidimo, da oblika in velikost fraktala omejeni; hkrati pa s povečanjem opazimo značilnost fraktala, **samopodobnost**, kar pomeni, da je celotni lik sestavljen iz posameznih (manjših) izhodiščnemu fraktalu podobnih oblik, te pa zopet iz manjših podobnih. Iz dimenzijske in oblikovne omejenosti je nastala potreba po večji prostosti in neskončnosti fraktalov vse večja. Tako so se “razvili” nelinearni fraktali. |
| **Nelinearni fraktali** | **JULIA** in **MANDELBORT** sta, ob podpori novejše tehnologije, našla rešitev, ki je fraktale iz sveta linearnosti in omejitev prenesla v svet nelinearnosti, v katerem ni dimenzijskih in oblikovnih omejitev, v katerem ne moremo v naprej predvidevati oblike, velikosti in barvne palete, ki določajo podobo nelinearnega fraktala. Vsak fraktal je unikaten in določen z natančno določenimi parametri in je nekaj posebnega, edinstvenega, s spremembo katerega koli parametra, ki določajo fraktal, dobimo drugi fraktal, ki je lahko podoben ali popolnoma drugačen izhodiščnemu.  GENERIRANJE NELINEARNIH FRAKTALOVPoglejmo si fraktalno sliko in si zamislimo, da je ekran ravnina sestavljena iz velikega števila točk. Vsaka točka pa ima x in y koordinato, kateri določata njeno lego na ravnini. Vsaka točka je na drugem mestu, zato so koordinate vsake točke drugačne od ostalih. Za generiranje fraktalov, **najprej potrebujemo funkcijo**. Za začetek si izberemo točko, nato pa izvršimo funkcijo na tej točki. Na tak način dobimo novi x in y koordinati točke. Tako torej prestavimo izbrano točko na novo lokacijo določeno z novima koordinatama. Ta postopek ponavljamo tako, da vstavljamo v isto funkcijo rezultat prejšnje (**iteracija funkcije**) in s tem premikamo točko po ravnini. Po tem pogumnem dejanju, ugotovimo naslednje:1. zgodi se, da se bo med iteracijo funkcije točka premikala po ravnini in je ne bo nikoli zapustila,
2. ali, da se bo točka nekaj časa premikala po ravnini in jo nato zapustila.

Če točka ne zapusti ravnine po n-ti iteraciji (= zadnja stopnja iteracije, ki je odvisna od programa za generiranje fraktalov) jo obarvamo z barvo št. 1 (številčenje barv je odvisno od posameznega programa za generiranje fraktalov).Kadar točka zapusti po neki iteraciji ravnino, program preveri, po kateri in ji dodeli primerno barvo iz barvne palete. Tako nastane fraktal.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Mandelbort set 1 | Mandelbort set 2 | Mandelbort set 3 |

Tu lahko vidimo tri Mandelbort sete, ki so bili skreirani v različnih programih (od tod izhajajo različne barve).  |
|  | Vse to je dandanes, v tej visoko tehnološko razviti dobi, sila preprosto, saj moramo mi zgolj določiti funkcijo, ostalo pa naredijo računalniki. Da pa računalnik ne bi računal v nedogled, je ravnina omejena. Ravno to, da ravnino omejimo, pa nasprotuje neomejenostji nelinearnih fraktalov. A če pomislimo, da je v eni ravnini več kot **800.000** točk, nad katerimi je treba izvršiti iteracijo, je to tudi za še tako dober računalnik preveč. Pri najbolj običajnem fraktalu, MANDELBORT SETU, ki je generiran iz enačbe **z=z\*z+c**, je potrebno izračunati **6.000.000** računov. To je glavni razlog, da se ta veda matematike ni mogla razvijati v dvajsetih letih 20. stoletja, poleg tega je tudi ravnina omejena na polje okoli -2 do 2, to pomeni, da je potrebno računati z številkami, ki imajo tudi po deset decimalnih mest (npr.: 1,2432574231). A to še ni vse! Poleg tega se vse odvija v kompleksnih številih, ki jih tvorita realna in imaginarna komponenta.Primer kompleksnega števila, ki je v uporabi pri generiranju fraktalov, je število *z = x + yi*, kjer sta *x* in *y* realna in imaginarna komponenta, medtem ko je *i* imaginarno število, katerega kvadrat je *i2 = -1*. Kompleksna števila so predstavljena v kompleksni ravnini, v pravokotnem koordinatnem sistemu (z realno komponento na vodoravni osi in imaginarno na navpični).**JULIA SET** je glede na enačbo podobno sestavljen kot Mandelbort set, vendar se razlikuje samo po konstanti **c**, katero je Mandelbort zastavil drugače kot jo je Julia. Zanimivo, da zaradi tega dobi njegov fraktal popolnoma drugačno osnovno podobo. Mandelbortova enačba

|  |  |
| --- | --- |
| Mandelbort set | Julia set |

 GENERIRANJE FRAKTALOV S POMOČJO RAČUNALNIŠKIH PROGRAMOVGeneriranje fraktalov s pomočjo programov, kot so **FLARIUM24**, **TIERA-ZON** itd., je zelo enostavno. Moramo samo vpisati enačbo - funkcijo, katera se bo iterirala in nato rezultat oblikujemo s pomočjo filtrov, katere delimo na navadne in barvne. Navadni filtri spreminjajo obliko, barvni pa samo barve fraktala. Večina teh programov ima kot osnovo za generiranje fraktalov Mandelbortov set in enačbo. Hitrost izračunavanja je odvisna od njegove velikosti, enačbe, najbolj pa od zmogljivosti procesorja.*Zanimivo:* procesor Intel Pentium 133 MHz recimo izračunava fraktal velikosti 800x600 v posameznih primerih tudi do 30 min in več.  |
| **Literatura** | Slike (zanimivih) fraktalov:<http://www.fractalus.com/galleries/index-thumbs.htm>Zanimive povezave do strani z informacijami o fraktalih<http://www.math.com/students/wonders/fractals.html> Devlin Keith: *Nova zlata doba matematike*, Ljubljana DMFA Slovenije 1993, 71-94Beloglavec Emil, …: *Juliajeva množica, 1. del*, Presek 1987/88, št. 2Gradišek J.: *Fraktalna geometrija narave*, ŽIT 1997 / julij - avgust |