DELAMO PO UČBENIKU: SPATIUM NOVUM

POLINOMI

TO SO REALNE FUNKCIJE REALNE SPREMENLJIVKE, DEFINIRANE ZA VSA REALNA ŠTEVILA, Z ZALOGO VREDNOSTI, KI JE PODMNOŽICA MNOŽICE R, IN IMAJO OBLIKO:

$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$; a_n ni enako 0

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$; a_n ni enako 0

$p(x)$ je polinom stopnje n: $st(p) = n$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \longrightarrow$ KOEFICIENTI POLINOMA P

$a_n \longrightarrow$ VODILNI KOEFICIENT

$a_0 \longrightarrow$ PROSTI ČLEN

$p(x) = a_0 \longrightarrow$ KONSTANTNI POLINOM

- *polinom stopnje 0*

$p(x) = 0 \longrightarrow$ NIČELNI POLINOM

- *edini konstantni polinom, ki mu stopnje ne pripišemo*

KDAJ STA 2 POLINOMA ENAKA?

$$p(x) = q(x)$$

- Dva polinoma sta enaka, če imata enako stopnjo in enake koeficiente pri potencah neznanke x z istim eksponentom.

RAČUNSKE OPERACIJE S POLINOMI

- **MNOŽENJE POLINOMA S ŠTEVILOM**
- **SEŠTEVANJE**
- **ODŠTEVANJE**
- **MNOŽENJE POLINOMOV**
- **DELJENJE POLINOMOV**

MNOŽENJE POLINOMA S ŠTEVILOM

- Polinom *p* pomnožimo z realnim številom *k* tako, da s *k* množimo vse koeficiente polinoma.

- ZGLED str. 12

SEŠTEVANJE POLINOMOV

- Dva polinoma seštejemo tako, da seštejemo koeficiente pri potencah z istim eksponentom.
- VSOTA: polinom
  - stopnja: enaka višji stopnji od stopenj obeh polinomov ali kvečjemu nižja
- KOMUTATIVNOST: $p(x)+q(x) = q(x)+p(x)$
- ASOCIATIVNOST:

$$(p(x)+q(x))+r(x) = q(x)+(p(x)+r(x))$$

ODŠTEVANJE POLINOMOV

- Odštevamo koeficiente pri potencah z istim eksponentom.
- RAZLIKA: polinom
  - stopnja: nižja ali enaka višji od stopenj odštevanca in zmanjševanca

MNOŽENJE POLINOMOV

- Polinoma *p* in *q* pomnožimo tako, da pomnožimo vsak člen polinoma *p* z vsakim členom polinoma *q*.
- PRODUKT: polinom
  - stopnja: enaka vsoti stopenj faktorjev
- KOMUTATIVNOST: **p(x) x q(x) = q(x) x p(x)**
- ASOCIATIVNOST:

(p(x) x q(x)) x r(x) = q(x) x (p(x) x r(x))

DELJENJE POLINOMOV

$$\mathbf{p(x) = k(x)q(x) + r(x)}$$

ALI

$$\mathbf{p(x) : q(x) = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}}$$

- Polinom *k*, ki je kvocient pri deljenju polinoma *p* s polinomom *q*, je polinom stopnje n-m, ostanek *r* pa je polinom, ki je nižje stopnje od stopnje delitelja *q*.
- Polinom *p* je je deljiv s polinomom *q*, kadar je ostanek r(x) enak 0.

HORNERJEV ALGORITEM

- Olajša nam postopek deljenja polinoma z linearnim polinomom.

LINEARNI POLINOM OBLIKE: **$q(x) = x - c$**

	2	−4	0	−498	50	22	88
		14	70	490	−56	−42	−140
7	2	10	70	−8	−6	−20	−52

$$(2x^6 - 4x^5 - 498x^3 + 50x^2 + 22x + 88) : (x - 7) = 2x^5 + 10x^4 + 70x^3 - 8x^2 - 6x - 20$$

$$\begin{array}{l}
-\ 2x^6 - 14x^5 \\
\hline
-\ \ 10x^5 - 498x^3 + 50x^2 + 22x + 88 \\
\quad 10x^5 - 70x^4 \\
\hline
\qquad 70x^4 - 498x^3 + 50x^2 + 22x + 88 \\
-\ \ 70x^4 - 490x^3 \\
\hline
\qquad\qquad 8x^3 + 50x^2 + 22x + 88 \\
-\ \ -8x^3 + 56x^2 \\
\hline
\qquad\qquad -6x^2 + 22x + 88 \\
-\ \ -6x^2 + 42x \\
\hline
\qquad\qquad\quad -20x + 88 \\
-\ \ -20x + 140 \\
\qquad\qquad\qquad -52
\end{array}$$

NIČLE POLINOMA

- Ničla polinoma je tista vrednost spremenljivke x, pri kateri je vrednost polinoma enaka nič.

$$p(x) = 0$$

- Ostanek pri deljenju polinoma p z linearnim polinomom (x-c) je enak natanko takrat, ko je p(c)=0. To pomeni, da je c ničla polinoma p natanko takrat, ko je polinom p deljiv z linearnim polinomom (x-c).
- HORNERJEV ALGORITEM

ISKANJE NIČEL POLINOMA

- Kandidati za celoštevilske ničle so delitelji konstantnega člena polinoma. Celo število c je lahko ničla polinoma le, če c deli konstantni člen a_0 polinoma p.

$$c \mid a_0$$

- Racionalne ničle polinoma p iščemo med okrajšanimi ulomki $\frac{c}{d}$, pri čemer mora imenovalec d deliti vodilni koeficient polinoma; števec c pa mora deliti konstantni ali prosti člen.

OSNOVNI IZREK ALGEBRE

- Vsak nekonstantni polinom s kompleksnimi koeficienti ima vsaj eno kompleksno ničlo.

1. ŠTEVILO NIČEL NE PRESEGA STOPNJE POLINOMA
2. POLINOM STOPNJE *n* IMA NATANKO *n* NIČEL

- Če so $x_1, x_2 \ldots x_n$ ničle polinoma, lahko polinom p zapišemo kot produkt linearnih faktorjev.

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

- Nekaj ničel je med seboj lahko enakih, če je v zapisu polinoma produkta linearnih faktorjev 1 faktor (x – xi) nastopa večkrat (k-krat) pravimo, da je xi večkratna (h-kratna) ničla.

OSNOVNI IZREK ALGEBRE

Ničla, ki ni večkratna je ENOSTAVNA, ENKRATNA ali ENOJNA

DVAKRATNA NIČLA = DVOJNA NIČLA

TRIKRATNA NIČLA = TROJNA NIČLA

3. KOMPLEKSNE NIČLE NASTOPAJO V KONJUGIRANIH PARIH, ČE JE $x=a+bi$ NIČLA POLINOMA, POTEM JE TUDI $x=a-bi$ NIČLA TEGA POLINOMA.

4. POLINOM LIHE STOPNJE IMA VSAJ ENO REALNO NIČLO.

GRAF POLINOMA

KAJ MORAMO UGOTOVITI PREDEN NARIŠEMO GRAF POLINOMA:

1. Kje seka abscisno in ordinatno os?
2. Kako se obnaša v okolici ničel?
3. Kako se obnaša daleč proč od koordinatnega izhodišča?

PRESEČISČA S KOORDINATNIMA OSEMA

- Graf polinoma seka ORDINATNO OS v točki **T(0,a_0)**; $x = 0$, $y = a_0$ □ *ZAČETNA VREDNOST*

- Presečišča ali dotikališča z ABSCISNO OSJO so v NIČLAH POLINOMA, to so vrednosti **$p(x)=0$**; $y=0$.

OBNAŠANJE GRAFA V OKOLICI NIČLE

- NIČLA LIHE STOPNJE: graf polinoma **seka abscisno os** in polinom v lihi ničli **spremeni predznak**

- NIČLA SODE STOPNJE: graf polinoma se **dotakne abscisne osi** in polinom v sodi ničli **NE spremeni predznaka**

OBNAŠANJE GRAFA POLINOMA ZA X-E DALEC OD KOORDINATNEGA IZHODIŠČA

- Daleč stran od koordinatnega izhodišča se graf polinoma obnaša kot vodilni člen.
- **p(100)=?**
- **p(-100)=?**

POLINOM: SODA ALI LIHA FUNKCIJA?

- SODA FUNKCIJA: če v njej nastopajo same sode potence spremenljivke x
  - *simetrična glede na ordinatno os*
- LIHA FUNKCIJA: če imajo vse potence spremenljivke x lihe eksponente in je prosti člen enak 0
  - *simetrična glede na koordinatno izhodišče*

REŠEVANJE NEENAČB VIŠJE STOPNJE

$$p(x) >, <, \leq, \geq 0$$

REŠITEV: interval/unija intervalov

REŠEVANJE NEENAČBE:

- **Na obeh straneh lahko prištejemo ali odštejemo isto število.**
- **Obe strani neenačbe lahko pomnožimo ali delimo z istim pozitivnim številom.**
- **ČE GA POMNOŽIMO ALI DELIMO Z NEGATIVNIM ŠTEVILOM, SE NEENAČAJ OBRNE!**