3.Cela števila

V množici naravnih števil ne moremo definirati računske operacije odštevanje - rezultat ni vedno naravno število. Zato množici naravnih števil dodamo še negativna števila in število 0 in tako dobimo množico celih števil.

Množico celih števil označimo: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Uporabljamo tudi oznaki:

$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ... \}$ (pozitivna cela števila)

$\mathbb{Z}^- = \{ ..., -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$ (negativna cela števila)

Torej velja: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

Za seštevanje in množenje celih števil veljajo naslednji zakoni oziroma aksiomi (za $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$):

$a + b = b + a$	komutativnostni zakon (za seštevanje)
$a + (b + c) = (a + b) + c$	asociativnostni zakon (za seštevanje)
$a + 0 = a$	zakon o nevtralnem elementu (za seštevanje)
$a + (-a) = 0$	zakon o inverznem (nasprotnem) elementu (za seštevanje)
$a\,b = b\,a$	komutativnostni zakon (za množenje)
$a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$	asociativnostni zakon (za množenje)
$a\,1 = a$	zakon o nevtralnem elementu (za množenje)
$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$	distributivnostni zakon (za seštevanje in množenje)

Odštevanje v množici celih števil definiramo kot prištevanje nasprotne vrednosti, torej:
$a - b = a + (-b)$

2.+3. Deljivost naravnih in celih števil

Število *b* je **večkratnik** števila *a*, če ga lahko zapišemo kot $b = k\,a$, pri čemer je *k* poljubno naravno (oziroma celo) število.

Primer: Število 7 ima večkratnike:

- v množici $\mathbb{N}$: 7, 14, 21, 28, 35, 42, ...

- v množici $\mathbb{Z}$: ..., -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, ...

Če je število *b* večkratnik števila *a*, pravimo tudi, da je število *a* **delitelj** števila *b* (ali na

kratko, da *a* **deli** *b*). To označimo:
$a \mid b$ (beri: *a* deli *b*)

Primer: Število 4 ima delitelje:
- v množici $\mathbb{N}$: 1, 2, 4
- v množici $\mathbb{Z}$: -4, -2, -1, 1, 2, 4

Praštevila in sestavljena števila

Praštevilo je naravno število, ki ima v množici $\mathbb{N}$ točno dva delitelja.
Sestavljeno naravno število je število, ki ima v množici $\mathbb{N}$ več kot dva delitelja.

V množici celih števil moramo upoštevati tudi negativne delitelje, zato je definicija praštevila in sestavljenega števila nekoliko drugačna:
Nerazcepno celo število je število, ki ima v množici $\mathbb{Z}$ točno štiri delitelje. Pozitivno nerazcepno število imenujemo praštevilo.
Sestavljeno (ali razcepno) celo število je število, ki ima v množici $\mathbb{Z}$ več kot štiri delitelje.

Števila -1, 0 in 1 so glede na število deliteljev posebna - ne uvrščamo jih niti med razcepna niti med nerazcepna števila.

Zgledi:
Praštevila so npr.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...
Sestavljena števila so npr.: 4, 6, 8, 9, 10, (pa tudi: -4, -6, -8, -9, -10, ...)
Števila -2, -3, -5, -7, ... so negativna nerazcepna števila.

Praštevil je neskončno mnogo.
Sestavljena števila imenujemo tudi razcepna zato, ker jih lahko razcepimo na produkt praštevil. Ta razcep imenujemo tudi **prafaktorizacija**. Razcep na prafaktorje je enoličen (spremenimo lahko le vrstni red faktorjev). Pri razcepu negativnega števila upoštevamo kot dodatni faktor še število -1.

Zgledi:
$6 = 2 \cdot 3$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$-75 = -1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = -1 \cdot 3 \cdot 5^2$

Skupni delitelji in večkratniki

Največji skupni delitelj danih števil je največje naravno število, ki deli obe dani števili (oziroma vsa dana števila). Označimo ga $D(a, b)$.

Primer: $D(12, 20) = 4$
(Največji skupni delitelj števil 12 in 20 je 4. Poleg tega imata števili 12 in 20 še druge skupne delitelje: 2, 1, -1, -2, -4. Na splošno velja: vsi skupni delitelji so delitelji največjega skupnega delitelja.)

Najmanjši skupni večkratnik danih števil je najmanjše naravno število, ki je večkratnik obeh (oziroma vseh) danih števil. Označimo ga $v(a, b)$.

Primer: $v(12, 20) = 60$
(Najmanjši skupni večkratnik števil 12 in 20 je 60. Poleg tega imata števili 12 in 20 še druge skupne večkratnike: 120, 180, 0, -60, -120, ... Na splošno velja: vsi skupni večkratniki so večkratniki najmanjšega skupnega večkratnika.)

Če je največji skupni delitelj dveh danih števil enak 1, pravimo, da sta števili **tuji**. V tem primeru nimata nobenega skupnega prafaktorja.
Zgled: Števili 24 in 35 sta tuji.

Za največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh števil velja zveza:
$D(a, b)\, v(a, b) = a\, b$

Pri iskanju največjega skupnega delitelja in najmanjšega skupnega večkratnika si lahko pomagamo z razcepom danih števil na prafaktorje.

Največji skupni delitelj dobimo tako, da pri vsakem prafaktorju upoštevamo najmanjšo potenco, ki nastopa v razcepu danih števil (upoštevamo tudi možnost, da je najmanjša potenca enaka 0).

Najmanjši skupni večkratnik dobimo tako, da pri vsakem prafaktorju upoštevamo največjo potenco, ki nastopa v razcepu danih števil.

Zgled:
$40 = 2^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1$
$36 = 2^2 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
$D(36, 40, 60) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4$
$v(36, 40, 60)= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$

Pri iskanju največjega skupnega delitelja dveh števil si lahko pomagamo tudi z **Evklidovim algoritmom**. Pri tem upoštevamo zvezo:
$D(a, b) = D(b, r)$ (r = ostanek pri deljenju števila a z b)

Zgled: Izračunajmo $D(348, 276)$. Pri deljenju z ostankom ponavadi uporabimo zapis v obliki preizkusa:
$348 = 1 \cdot 276 + 72$
$276 = 3 \cdot 72 + 60$
$72 = 1 \cdot 60 + 12$
$60 = 5 \cdot 12 + 0$ (končamo, ko je ostanek 0)
Torej velja: $D(348, 276) = D(276, 72) = D(72, 60) = D(60, 12)$
Sklep: $D(348, 276) = 12$ (največji skupni delitelj je zadnji od 0 različni ostanek)

S pomočjo zveze $D(a, b)\, v(a, b) = a\, b$ lahko izračunamo tudi najmanjši skupni večkratnik:
$v(348, 276) = 8004$