**8.Funkcije**

Funkcija *f* **:** *A*  *B* (funkcija iz množice *A* v množico *B*) je predpis (pravilo, postopek, preslikava, formula,..), ki danemu podatku *x*  *A* priredi funkcijsko vrednost *f* (*x*)  *B*.

 Množica *A* je množica vseh podatkov, na katerih izvajamo funkcijo *f*; torej množica vseh podatkov, za katere je funkcija definirana. Imenujemo jo tudi **definicijsko območje funkcije** *f*. Oznaka: D*f*

 Množico vseh funkcijskih vrednosti, ki jih pri tem dobimo, imenujemo **zaloga vrednosti funkcije** *f*. Oznaka: Z *f*
Zaloga vrednosti je lahko enaka množici *B*, lahko pa je tudi njena prava [podmnožica](http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/mnozice.html#podmn).

 **Funkcija realne spremenljivke** je funkcija, ki ima za podatke samo realna števila; torej: D *f*  .

 **Realna funkcija** je funkcija, ki ima za funkcijske vrednosti (tj. za rezultate) vedno samo realna števila; torej: Z *f*  .

V matematiki najpogosteje srečujemo funkcije, ki imajo za podatke in za rezultate samo realna števila. Pravimo jim **realne funkcije realne spremenljivke**.
Dogovor: Zaradi krajšega izražanja bomo v nadaljevanju uporabljali izraz *funkcija* v pomenu:
 »funkcija« = »realna funkcija realne spremenljivke«

**8.1. Podajanje funkcije**

Funkcijo podamo s **funkcijsko enačbo** ali s **funkcijskim predpisom**.

Oba vsebujeta ime funkcije (ponavadi *f* ), oznako neodvisne spremenljivke (ponavadi *x*) in formulo, po kateri izračunamo funkcijsko vrednost.

Zgled:
Funkcija *f* naj pomeni pravilo: »podatek kvadriraj in prištej 5«
To funkcijo zapišemo s funkcijsko enačbo (beri: *f* od *x* je enako *x*2 + 5):

... oziroma s funkcijskim predpisom (beri: *f* preslika *x* v *x*2 + 5):

**8.2. Ponazarjanje funkcije**

Funkcijo ponazorimo s tabelo ali z grafom.

* **Tabela funkcije** podaja različne vrednosti spremenljivke *x* in ustrezne funkcijske vrednosti *f* (*x*).

Zgled:
Dana je funkcija *f* (*x*) = *x*3 - 4*x*.

Zapišimo tabelo te funkcije na intervalu [-3, 3] s korakom 0.5:

* **Graf funkcije** je množica točk (*x*, *y*), za katere velja med koordinatama zveza *y* = *f* (*x*), torej:
 G*f* = {(*x*, *y*); *y* = *f* (*x*)}

Enačbo *y* = *f* (*x*) imenujemo tudi **enačba grafa funkcije**.

Zgled:
Graf funkcije *f* (*x*) = *x*3 - 4*x* (tj. množica točk, za katere velja enačba *y* = *x*3 - 4*x*):

**8.3. Računanje s funkcijami**

* Najpomembnejši računski postopek, ki ga računamo s funkcijami, je **izračun funkcijske vrednosti** pri danem podatku (vstavljanje podatka *x* v funkcijo).
Zgled:
Dana je funkcija *f* (*x*) = *x*2 + 5*x*. Izračunajmo vrednost te funkcije pri *x* = 3. Dobimo:
 *f* (3) = 32 + 5 · 3 = 24
* Poleg tega lahko s funkcijami računamo štiri osnovne računske operacije:
Funkciji *f* in *g* **seštejemo, odštejemo, zmnožimo** in **delimo** tako, da ustrezno računsko operacijo izračunamo za dani funkcijski vrednosti *f* (*x*) in *g*(*x*), torej:

 (*f* + *g*)(*x*) = *f* (*x*) + *g*(*x*)
 (*f* - *g*)(*x*) = *f* (*x*) - *g*(*x*)
 (*f* **·** *g*)(*x*) = *f* (*x*) **·** *g*(*x*)

* Posebna računska operacija, ki jo računamo v množici funkcij, je **kompozitum** ali sestava funkcij. Kompozitum funkcij *f* in *g* označimo *f* ○ *g* in ga izračunamo po pravilu:

 (*f* ○ *g*)(*x*) = *f* (*g*(*x*))

To pomeni, da podatek *x* najprej preslikamo s funkcijo *g*, tako da dobimo *g*(*x*), potem pa tako dobljeni rezultat preslikamo še s funkcijo *f*, tako da dobimo *f* (*g*(*x*)).
Drugače povedano: kompozitum *f* ○ *g* dobimo tako, da v enačbo funkcije *f* namesto spremenljivke *x* vstavimo *g*(*x*).
Rezultat kompozituma imenujemo tudi sestavljena funkcija.

Zgled:
Izračunajmo kompozitum naslednjih dveh funkcij.

Iz zgornjega zgleda vidimo, da kompozitum *f* ○ *g* ni enak kompozitumu *g* ○ *f* (ne velja komutativnost).
Izkaže pa se, da za kompozitum treh funkcij velja asociativnostni zakon:
 *f* ○ (*g* ○ *h*) = (*f* ○ *g*) ○ *h*

V množici funkcij obstaja tudi funkcija, ki je nevtralni element za kompozitum. To je identična funkcija *f*id(*x*) = *x*. Velja zakon o nevtralnem elementu:
 *f* ○ *f*id = *f*id ○ *f* = *f*

* **Inverzna funkcija** je funkcija, ki deluje ravno obratno kot dana funkcija *f*. Če dana funkcija *f* preslika podatek *x* v rezultat *y*, potem inverzna funkcija preslika *y* nazaj v *x*.Izkaže se, da inverzna funkcija obstaja, samo če je dana funkcija *f* [bijektivna](http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/funk2.html%22%20%5Cl%20%22bijekt) funkcija *f* **:** *A*  *B*.
* Inverzno funkcijo (če obstaja) označimo *f* -1 in to je funkcija *f* -1 **:** *B*  *A* (tj. *f* -1 je funkcija, ki preslikuje iz *B* v množico *A*).
Inverzna funkcija *f* -1 deluje ravno obratno kot prvotna funkcija *f*, zato velja (*f* ○ *f* -1)(*x*) = (*f* -1 ○ *f* )(*x*) = *x*

Ker inverzna funkcija deluje ravno obratno kot prvotna funkcija *f*, se pri inverzni funkciji vloga podatka in rezultata zamenjata. Če je *f* (*a*) = *b*, potem je *f* -1(*b*) = *a* (tj: če funkcija *f* preslika element *a* v element *b*, potem inverzna funkcija *f* -1 preslika element *b* v element *a*).

Na tem pravilu je zasnovan tudi **postopek določanja enačbe inverzne funkcije:**
 Najprej enačbo prvotne funkcije zapišemo v obliki *y* = *f* (*x*).
 Potem v tej enačbi zamenjamo črki *x* in *y* (zamenjamo vlogo podatka in rezultata).
 Potem iz dobljene enačbe izrazimo *y* in tako dobimo enačbo inverzne funkcije.

Zgled:
Poiščimo inverz funkcije *f* (*x*) = 2*x* + 5. Najprej zapišimo:
 *f* **:** *y* = 2*x* + 5
Zamenjamo *x* in *y* in izrazimo *y*:
 *f* -1 **:** *x* = 2*y* + 5
 -2*y* = -*x* + 5
 *y* = *x* -
Torej je enačba inverzne funkcije:
 *f* -1(*x*) = *x* -

Kot smo že zapisali, inverz funkcije *f* obstaja, samo če je funkcija *f* [bijektivna](http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/funk2.html#bijekt). Kaj pa sicer? Pogosto si pomagamo tako, da funkcijo *f* omejimo (zožimo) na manjše definicijsko območje in s tem dosežemo, da je zožena funkcija *f* **:** *A*  *B* bijektivna.
Potem obstaja inverz *f* -1 **:** *B*  *A*. Tak inverz včasih imenujemo tudi delni inverz.
Zgled:
Funkcija *f* (*x*) = *x*2 ni bijektivna (točneje: ni bijektivna funkcija  ).
Če pa jo zožimo na nenegativna števila, hitro ugotovimo, da je *f* bijektivna funkcija 0+  0+.V smislu te zožitve obstaja tudi inverzna funkcija *f* -1 **:** 0+  0+, ki ima enačbo *f* -1(*x*) =

