8.Funkcije

Funkcija $f: A \to B$ (funkcija iz množice A v množico B) je predpis (pravilo, postopek, preslikava, formula,..), ki danemu podatku $x \in A$ priredi funkcijsko vrednost $f(x) \in B$.

 Množica A je množica vseh podatkov, na katerih izvajamo funkcijo f; torej množica vseh podatkov, za katere je funkcija definirana. Imenujemo jo tudi **definicijsko območje funkcije** *f*. Oznaka: D_f

 Množico vseh funkcijskih vrednosti, ki jih pri tem dobimo, imenujemo **zaloga vrednosti funkcije** *f*. Oznaka: Z_f

Zaloga vrednosti je lahko enaka množici B, lahko pa je tudi njena prava podmnožica.

 Funkcija realne spremenljivke je funkcija, ki ima za podatke samo realna števila; torej: $D_f \subseteq \mathbb{R}$.

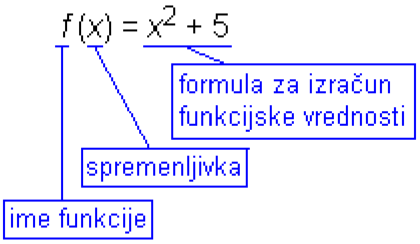
 Realna funkcija je funkcija, ki ima za funkcijske vrednosti (tj. za rezultate) vedno samo realna števila; torej: $Z_f \subseteq \mathbb{R}$.

V matematiki najpogosteje srečujemo funkcije, ki imajo za podatke in za rezultate samo realna števila. Pravimo jim **realne funkcije realne spremenljivke**.
Dogovor: Zaradi krajšega izražanja bomo v nadaljevanju uporabljali izraz *funkcija* v pomenu:
»funkcija« = »realna funkcija realne spremenljivke«

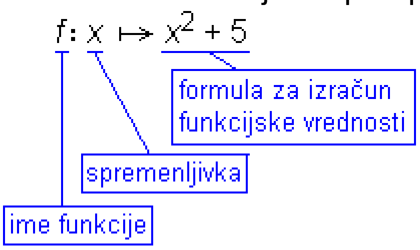
8.1. Podajanje funkcije

Funkcijo podamo s **funkcijsko enačbo** ali s **funkcijskim predpisom**.
Oba vsebujeta ime funkcije (ponavadi f), oznako neodvisne spremenljivke (ponavadi x) in formulo, po kateri izračunamo funkcijsko vrednost.

Zgled:
Funkcija f naj pomeni pravilo: »podatek kvadriraj in prištej 5«
To funkcijo zapišemo s funkcijsko enačbo (beri: f od x je enako $x^2 + 5$):



... oziroma s funkcijskim predpisom (beri: f preslika x v $x^2 + 5$):



8.2. Ponazarjanje funkcije

Funkcijo ponazorimo s tabelo ali z grafom.

- **Tabela funkcije** podaja različne vrednosti spremenljivke x in ustrezne funkcijske vrednosti $f(x)$.

  Zgled:
  Dana je funkcija $f(x) = x^3 - 4x$.

Zapišimo tabelo te funkcije na intervalu [-3, 3] s korakom 0.5:

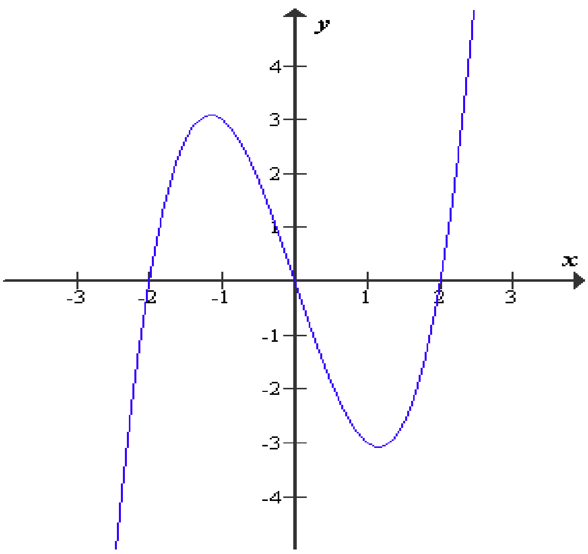
x	$f(x)$
-3	-15
-2.5	-5.625
-2	0
-1.5	2.625
-1	3
-0.5	1.875
0	0
0.5	-1.875
1	-3
1.5	-2.625
2	0
2.5	5.625
3	15

- **Graf funkcije** je množica točk (x, y), za katere velja med koordinatama zveza $y = f(x)$, torej:

  $G_f = \{(x, y); y = f(x)\}$

  Enačbo $y = f(x)$ imenujemo tudi **enačba grafa funkcije**.

  Zgled:
  Graf funkcije $f(x) = x^3 - 4x$ (tj. množica točk, za katere velja enačba $y = x^3 - 4x$):



8.3. Računanje s funkcijami

- Najpomembnejši računski postopek, ki ga računamo s funkcijami, je **izračun funkcijske vrednosti** pri danem podatku (vstavljanje podatka x v funkcijo).
  Zgled:
  Dana je funkcija $f(x) = x^2 + 5x$. Izračunajmo vrednost te funkcije pri $x = 3$. Dobimo:
  $f(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 = 24$

- Poleg tega lahko s funkcijami računamo štiri osnovne računske operacije:
  Funkciji f in g **seštejemo, odštejemo, zmnožimo** in **delimo** tako, da ustrezno

računsko operacijo izračunamo za dani funkcijski vrednosti $f(x)$ in $g(x)$, torej:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

- Posebna računska operacija, ki jo računamo v množici funkcij, je **kompozitum** ali sestava funkcij. Kompozitum funkcij f in g označimo $f \circ g$ in ga izračunamo po pravilu:

  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

  To pomeni, da podatek x najprej preslikamo s funkcijo g, tako da dobimo $g(x)$, potem pa tako dobljeni rezultat preslikamo še s funkcijo f, tako da dobimo $f(g(x))$.
  Drugače povedano: kompozitum $f \circ g$ dobimo tako, da v enačbo funkcije f namesto spremenljivke x vstavimo $g(x)$.
  Rezultat kompozituma imenujemo tudi sestavljena funkcija.

  Zgled:
  Izračunajmo kompozitum naslednjih dveh funkcij.
  $f(x) = \frac{4x}{x+8}$
  $g(x) = 2x + 3$

  $(f \circ g)(x) = \frac{4(2x+3)}{(2x+3)+8} = \frac{8x+12}{2x+11}$

  $(g \circ f)(x) = 2 \cdot \frac{4x}{x+8} + 3 = \frac{8x + 3(x+8)}{x+8} = \frac{11x+24}{x+8}$

  Iz zgornjega zgleda vidimo, da kompozitum $f \circ g$ ni enak kompozitumu $g \circ f$ (ne velja komutativnost).
  Izkaže pa se, da za kompozitum treh funkcij velja asociativnostni zakon:
  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

  V množici funkcij obstaja tudi funkcija, ki je nevtralni element za kompozitum. To je identična funkcija $f_{id}(x) = x$. Velja zakon o nevtralnem elementu:
  $f \circ f_{id} = f_{id} \circ f = f$

- **Inverzna funkcija** je funkcija, ki deluje ravno obratno kot dana funkcija f. Če dana funkcija f preslika podatek x v rezultat y, potem inverzna funkcija preslika y nazaj v x.Izkaže se, da inverzna funkcija obstaja, samo če je dana funkcija f bijektivna funkcija $f: A \to B$.

- Inverzno funkcijo (če obstaja) označimo f^{-1} in to je funkcija $f^{-1}: B \to A$ (tj. f^{-1} je funkcija, ki preslikuje iz B v množico A).
  Inverzna funkcija f^{-1} deluje ravno obratno kot prvotna funkcija f, zato velja $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Ker inverzna funkcija deluje ravno obratno kot prvotna funkcija *f*, se pri inverzni funkciji vloga podatka in rezultata zamenjata. Če je $f(a) = b$, potem je $f^{-1}(b) = a$ (tj: če funkcija *f* preslika element *a* v element *b*, potem inverzna funkcija f^{-1} preslika element *b* v element *a*).

Na tem pravilu je zasnovan tudi **postopek določanja enačbe inverzne funkcije:**

- Najprej enačbo prvotne funkcije zapišemo v obliki $y = f(x)$.
- Potem v tej enačbi zamenjamo črki *x* in *y* (zamenjamo vlogo podatka in rezultata).
- Potem iz dobljene enačbe izrazimo *y* in tako dobimo enačbo inverzne funkcije.

Zgled:
Poiščimo inverz funkcije $f(x) = 2x + 5$. Najprej zapišimo:

$f:\ y = 2x + 5$

Zamenjamo *x* in *y* in izrazimo *y*:

$f^{-1}:\ x = 2y + 5$

$-2y = -x + 5$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Torej je enačba inverzne funkcije:

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Kot smo že zapisali, inverz funkcije *f* obstaja, samo če je funkcija *f* bijektivna. Kaj pa sicer? Pogosto si pomagamo tako, da funkcijo *f* omejimo (zožimo) na manjše definicijsko območje in s tem dosežemo, da je zožena funkcija $f:\ A \to B$ bijektivna.
Potem obstaja inverz $f^{-1}:\ B \to A$. Tak inverz včasih imenujemo tudi delni inverz.
Zgled:
Funkcija $f(x) = x^2$ ni bijektivna (točneje: ni bijektivna funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
Če pa jo zožimo na nenegativna števila, hitro ugotovimo, da je *f* bijektivna funkcija $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. V smislu te zožitve obstaja tudi inverzna funkcija $f^{-1}:\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, ki ima enačbo $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$