**9. Lastnosti funkcij**

Naj bo *f* realna funkcija realne spremenljivke. Oglejmo si nekaj najpomembnejših lastnosti, ki nas zanimajo pri taki funkciji.

**9.1.Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost**

* Funkcija je **injektivna**, če preslika različne podatke v različne rezultate:  
   *x*1, *x*2: *x*1 ≠ *x*2  *f* (*x*1) ≠ *f* (*x*2)
* Funkcija *f* **:** *A*  *B* je **surjektivna**, če je vsak element množice *B* slika nekega elementa *x* iz množice *A*.  
  To pomeni, da je realna funkcija *f* **surjektivna**, če je njena zaloga vrednosti enaka množici vseh realnih števil:  
   Z *f* =



* Funkcija je **bijektivna**, če je injektivna in hkrati surjektivna.  
  Bijektivno funkcijo imenujemo tudi **bijekcija** ali **povratno enolična preslikava**. (Povratna enoličnost pomeni, da poljubnemu podatku ustreza točno en rezultat, poljubnemu rezultatu pa ustreza točno en podatek.)

**9.2. Naraščanje, padanje, omejenost**

* **Funkcija narašča**, če ima pri večjem podatku tudi večji rezultat:  
   *x*1, *x*2: *x*1 > *x*2  *f* (*x*1) > *f* (*x*2)   
    
  Če zgornja lastnost velja za vsak *x*1 in *x*2 iz definicijskega območja funkcije *f*, potem pravimo, da funkcija narašča povsod.  
  Če zgornja lastnost velja za vsak *x*1 in *x*2 iz neke množice *A*, potem pravimo, da funkcija narašča na množici *A*.  
  Če zgornja lastnost velja za vsak *x*1 in *x*2 iz neke okolice dane točke *a*, potem pravimo, da funkcija narašča v okolici točke *a*.  
    
  (Opomba: Nekateri avtorji v zgornji lastnosti dopuščajo tudi enakost, torej:  
   *x*1, *x*2: *x*1 > *x*2  *f* (*x*1) ≥ *f* (*x*2)  
  Če želimo ločiti obe varianti, pravimo prvi možnosti strogo naraščanje (>), drugi pa nestrogo naraščanje (≥).)
* **Funkcija pada**, če ima pri večjem podatku manjši rezultat:  
   *x*1, *x*2: *x*1 > *x*2  *f* (*x*1) < *f* (*x*2)   
    
  Če zgornja lastnost velja za vsak *x*1 in *x*2 iz definicijskega območja funkcije *f*, potem pravimo, da funkcija pada povsod.  
  Če zgornja lastnost velja za vsak *x*1 in *x*2 iz neke množice *A*, potem pravimo, da funkcija pada na množici *A*.  
  Če zgornja lastnost velja za vsak *x*1 in *x*2 iz neke okolice dane točke *a*, potem pravimo, da funkcija pada v okolici točke *a*.  
    
  (Opomba: Nekateri avtorji v zgornji lastnosti dopuščajo tudi enakost, torej:  
   *x*1, *x*2: *x*1 > *x*2  *f* (*x*1) ≤ *f* (*x*2)  
  Če želimo ločiti obe varianti, pravimo prvi možnosti strogo padanje (<), drugi pa nestrogo padanje (≤).)
* Funkciji, ki povsod narašča ali povsod pada, pravimo, da je **monotona** funkcija.
* **Funkcija je navzgor omejena**, če obstaja realno število *M*, tako da velja:  
   *x* D*f*: *f* (*x*) ≤ *M*  
  Število *M*, ki nastopa v zgornji lastnosti, imenujemo **zgornja meja** funkcije. Če je funkcija navzgor omejena, obstaja celo več zgornjih mej. Najmanjši med njimi pravimo **natančna zgornja meja** ali supremum funkcije. Funkcija lahko natančno zgornjo mejo doseže ali pa tudi ne.  
    
  (Opomba: Omejenost navzgor nas ponavadi zanima na celotnenem definicijskem območju, lahko pa bi preučevali tudi omejenost na dani množici *A*.)
* **Funkcija je navzdol omejena**, če obstaja realno število *m*, tako da velja:  
   *x* D*f*: *f* (*x*) ≥ *m*  
  Število *m*, ki nastopa v zgornji lastnosti, imenujemo **spodnja meja** funkcije. Če je funkcija navzdol omejena, obstaja celo več spodnjih mej. Največji med njimi pravimo **natančna spodnja meja** ali infimum funkcije. Funkcija lahko natančno spodnjo mejo doseže ali pa tudi ne.  
    
  (Opomba: Omejenost navzdol nas ponavadi zanima na celotnenem definicijskem območju, lahko pa bi preučevali tudi omejenost na dani množici *A*.)
* Funkcija je **omejena**, če je navzgor in navzdol omejena.

**9.3. Maksimumi in minimumi**

* **Maksimum funkcije** je točka *T*(*x*M, *y*M) na grafu, v kateri je funkcijska vrednost večja kot v drugih točkah.  
  Ločimo različne variante:  
    
  Če je v tej točki funkcijska vrednost večja kot v katerikoli drugi točki na celotnem definicijskem območju, pravimo, da je *T*(*x*M, *y*M) **globalni maksimum funkcije *f***.  
  Če je v tej točki funkcijska vrednost večja kot v katerikoli drugi točki iz neke okolice točke *T*(*x*M, *y*M), pravimo, da je *T*(*x*M, *y*M) **lokalni maksimum funkcije *f***.  
  Če je v tej točki funkcijska vrednost večja kot v katerikoli drugi točki iz neke dane množice *A*, pravimo, da je *T*(*x*M, *y*M) **maksimum funkcije *f* na dani množici *A***.
* **Minimum funkcije** je točka *T*(*x*m, *y*m) na grafu, v kateri je funkcijska vrednost manjša kot v drugih točkah.
* Ločimo različne variante:  
    
  Če je v tej točki funkcijska vrednost manjša kot v katerikoli drugi točki na celotnem definicijskem območju, pravimo, da je *T*(*x*m, *y*m) **globalni minimum funkcije *f***.  
  Če je v tej točki funkcijska vrednost manjša kot v katerikoli drugi točki iz neke okolice točke *T*(*x*m, *y*m), pravimo, da je *T*(*x*m, *y*m) **lokalni minimum funkcije *f***.  
  Če je v tej točki funkcijska vrednost manjša kot v katerikoli drugi točki iz neke dane množice *A*, pravimo, da je *T*(*x*m, *y*m) **minimum funkcije *f* na dani množici *A***.
* Maksimume in minimume imenujemo tudi **ekstremi** funkcije.

**9.4. Lihost in sodost**

* Funkcija je **liha**, če za vsak *x*D*f* velja: ***f* (- *x*) = - *f* (*x*)**   
  Graf lihe funkcije je simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema.
* Funkcija je **soda**, če za vsak *x*D*f* velja: ***f* (- *x*) = *f* (*x*)**   
  Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

**9.5. Ničle, poli, asimptote**

* **Ničla** funkcije *f* je število *a*, za katero velja ***f* (*a*) = 0.**  
  V ničlah graf funkcije seka abscisno os.
* **Odsek na ordinatni osi** dobimo tako, da v enačbo funkcije vstavimo *x* = 0.  
  Dobljena vrednost *f* (0) nam pove, kje graf funkcje seka ordinatno os.
* **Asimptota** funkcije je premica, ki se ji graf funkcije približuje, ko se oddaljujemo od izhodišča koordinatnega sistema.
* **Pol** funkcije je število *x*, kjer vrednost funkcije ni definirana, v bližnji okolici pa vrednost funkcije narašča ali pada čez vse meje (proti plus ali minus neskončno).  
  V okolici pola se graf funkcije približuje navpični asimptoti.