9. Lastnosti funkcij

Naj bo *f* realna funkcija realne spremenljivke. Oglejmo si nekaj najpomembnejših lastnosti, ki nas zanimajo pri taki funkciji.

9.1. Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost

- Funkcija je **injektivna**, če preslika različne podatke v različne rezultate:
  $\forall x_1, x_2: \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

- Funkcija $f: A \rightarrow B$ je **surjektivna**, če je vsak element množice *B* slika nekega elementa *x* iz množice *A*.
  To pomeni, da je realna funkcija *f* **surjektivna**, če je njena zaloga vrednosti enaka množici vseh realnih števil:
  $Z_f = \mathbb{R}$

- Funkcija je **bijektivna**, če je injektivna in hkrati surjektivna.
  Bijektivno funkcijo imenujemo tudi **bijekcija** ali **povratno enolična preslikava**.
  (Povratna enoličnost pomeni, da poljubnemu podatku ustreza točno en rezultat, poljubnemu rezultatu pa ustreza točno en podatek.)

9.2. Naraščanje, padanje, omejenost

- **Funkcija narašča**, če ima pri večjem podatku tudi večji rezultat:
  $\forall x_1, x_2: \quad x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$

  Če zgornja lastnost velja za vsak x_1 in x_2 iz definicijskega območja funkcije *f*, potem pravimo, da funkcija narašča povsod.
  Če zgornja lastnost velja za vsak x_1 in x_2 iz neke množice *A*, potem pravimo, da funkcija narašča na množici *A*.
  Če zgornja lastnost velja za vsak x_1 in x_2 iz neke okolice dane točke *a*, potem pravimo, da funkcija narašča v okolici točke *a*.

  (Opomba: Nekateri avtorji v zgornji lastnosti dopuščajo tudi enakost, torej:
  $\forall x_1, x_2: \quad x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$
  Če želimo ločiti obe varianti, pravimo prvi možnosti strogo naraščanje (>), drugi pa nestrogo naraščanje (≥).)

- **Funkcija pada**, če ima pri večjem podatku manjši rezultat:
  $\forall x_1, x_2: \quad x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

  Če zgornja lastnost velja za vsak x_1 in x_2 iz definicijskega območja funkcije *f*, potem pravimo, da funkcija pada povsod.

Če zgornja lastnost velja za vsak x_1 in x_2 iz neke množice A, potem pravimo, da funkcija pada na množici A.
Če zgornja lastnost velja za vsak x_1 in x_2 iz neke okolice dane točke a, potem pravimo, da funkcija pada v okolici točke a.

(Opomba: Nekateri avtorji v zgornji lastnosti dopuščajo tudi enakost, torej:
$\forall x_1, x_2: \quad x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$
Če želimo ločiti obe varianti, pravimo prvi možnosti strogo padanje (<), drugi pa nestrogo padanje (≤).)

- Funkciji, ki povsod narašča ali povsod pada, pravimo, da je **monotona** funkcija.

- **Funkcija je navzgor omejena**, če obstaja realno število M, tako da velja:
  $\forall x \in D_f: \quad f(x) \leq M$
  Število M, ki nastopa v zgornji lastnosti, imenujemo **zgornja meja** funkcije. Če je funkcija navzgor omejena, obstaja celo več zgornjih mej. Najmanjši med njimi pravimo **natančna zgornja meja** ali supremum funkcije. Funkcija lahko natančno zgornjo mejo doseže ali pa tudi ne.

  (Opomba: Omejenost navzgor nas ponavadi zanima na celotnenem definicijskem območju, lahko pa bi preučevali tudi omejenost na dani množici A.)

- **Funkcija je navzdol omejena**, če obstaja realno število m, tako da velja:
  $\forall x \in D_f: \quad f(x) \geq m$
  Število m, ki nastopa v zgornji lastnosti, imenujemo **spodnja meja** funkcije. Če je funkcija navzdol omejena, obstaja celo več spodnjih mej. Največji med njimi pravimo **natančna spodnja meja** ali infimum funkcije. Funkcija lahko natančno spodnjo mejo doseže ali pa tudi ne.

  (Opomba: Omejenost navzdol nas ponavadi zanima na celotnenem definicijskem območju, lahko pa bi preučevali tudi omejenost na dani množici A.)

- Funkcija je **omejena**, če je navzgor in navzdol omejena.

9.3. Maksimumi in minimumi

- **Maksimum funkcije** je točka $T(x_M, y_M)$ na grafu, v kateri je funkcijska vrednost večja kot v drugih točkah.
  Ločimo različne variante:

  Če je v tej točki funkcijska vrednost večja kot v katerikoli drugi točki na celotnem definicijskem območju, pravimo, da je $T(x_M, y_M)$ **globalni maksimum funkcije *f***.
  Če je v tej točki funkcijska vrednost večja kot v katerikoli drugi točki iz neke okolice točke $T(x_M, y_M)$, pravimo, da je $T(x_M, y_M)$ **lokalni maksimum funkcije *f***.
  Če je v tej točki funkcijska vrednost večja kot v katerikoli drugi točki iz neke dane množice A, pravimo, da je $T(x_M, y_M)$ **maksimum funkcije *f* na dani množici *A***.

- **Minimum funkcije** je točka $T(x_m, y_m)$ na grafu, v kateri je funkcijska vrednost manjša kot v drugih točkah.

- Ločimo različne variante:

  Če je v tej točki funkcijska vrednost manjša kot v katerikoli drugi točki na celotnem definicijskem območju, pravimo, da je $T(x_m, y_m)$ **globalni minimum funkcije *f***.
  Če je v tej točki funkcijska vrednost manjša kot v katerikoli drugi točki iz neke okolice točke $T(x_m, y_m)$, pravimo, da je $T(x_m, y_m)$ **lokalni minimum funkcije *f***.
  Če je v tej točki funkcijska vrednost manjša kot v katerikoli drugi točki iz neke dane množice A, pravimo, da je $T(x_m, y_m)$ **minimum funkcije *f* na dani množici *A***.

- Maksimume in minimume imenujemo tudi **ekstremi** funkcije.

9.4. Lihost in sodost

- Funkcija je **liha**, če za vsak $x \in D_f$ velja: $f(-x) = -f(x)$
  Graf lihe funkcije je simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema.

- Funkcija je **soda**, če za vsak $x \in D_f$ velja: $f(-x) = f(x)$
  Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

9.5. Ničle, poli, asimptote

- **Ničla** funkcije f je število a, za katero velja $f(a) = 0$.
  V ničlah graf funkcije seka abscisno os.

- **Odsek na ordinatni osi** dobimo tako, da v enačbo funkcije vstavimo $x = 0$. Dobljena vrednost $f(0)$ nam pove, kje graf funkcje seka ordinatno os.

- **Asimptota** funkcije je premica, ki se ji graf funkcije približuje, ko se oddaljujemo od izhodišča koordinatnega sistema.

- **Pol** funkcije je število x, kjer vrednost funkcije ni definirana, v bližnji okolici pa vrednost funkcije narašča ali pada čez vse meje (proti plus ali minus neskončno). V okolici pola se graf funkcije približuje navpični asimptoti.