Linearna funkcija

Definicija

Linearna funkcija $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ je definirana s predpisom f(x) = kx+n; k, n $\in\mathbb{R}$.

k…**smerni koeficient**

n…**začetna vrednost**

D_f, Z_f

Definicijsko območje linearne funkcije so vsa realna števila.

Zaloga vrednosti so vsa realna števila, če je k ≠ 0, za k = 0 pa je zaloga vrednosti le realno število n.

Oblike enačbe premice

Ekspliciitna: $y=kx+n$

Implicitna: $ax+by+c=0;\ a,b,c\in\mathbb{R}$

a in b nista hkrati enaka 0

Odsekovna: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1;\ m,n\neq 0$

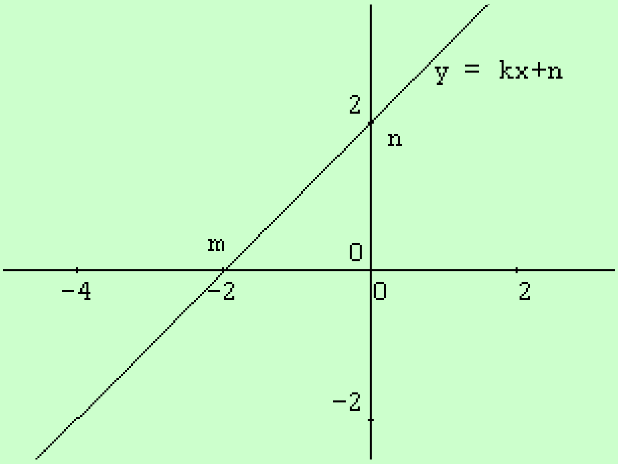
Lastnosti

- **Začetna vrednost** f(0) = n določa presečišče grafa linearne funkcije z ordinatno osjo.
- **Diferenčni količnik** linearne funkcije je $k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
- Če je k > 0, je funkcija **naraščajoča**, če je k < 0, je funkcija **padajoča**, če je k = 0, je funkcija **konstantna**.
- **Ničla** linearne funkcije $f(x)=kx+n$ je vrednost spremenljivke x, za katero je f(x) = 0.

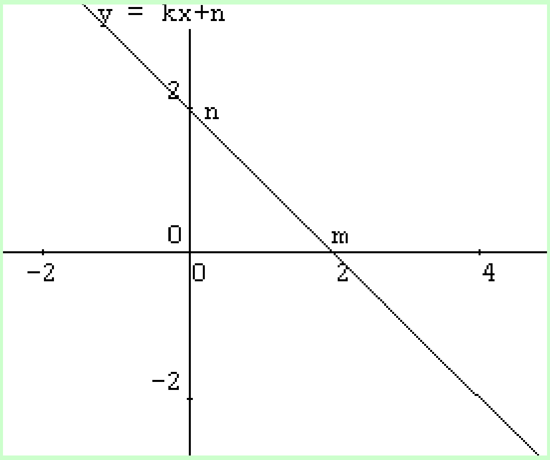
Graf

Graf linearne funkcije je **premica**, podana z enačbo $y = kx + n$.

k > 0



k < 0



Posebnosti

Enačba premice skozi točki $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ je:

$$y - y_1 = k(x - x_1),\quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Premici z enačbama $y = k_1 x + n_1$ in $y = k_2 x + n_2$ sta **vzporedni** natanko takrat, ko je $k_1 = k_2$ in **pravokotni** natanko takrat, ko je $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Kvadratna funkcija

Definicija

Kvadratna funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom $f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

a…**vodilni koeficient**
b…**koeficient linearnega člena**
c…**svobodni** ali **prosti člen**

D_f, Z_f

Definicijsko območje je množica vseh realnih števil.
Zaloga vrednosti je za a > 0 interval $[q, +\infty)$ ter za a < 0 interval $(-\infty, q]$, kjer je (p,q) teme dane parabole.

Lastnosti

- f(0) = c je **presečišče** grafa z **ordinatno osjo**.
- Število a določa **razteg** grafa v smeri ordinatne osi in **odprtost** grafa navzgor, če je a > 0, oziroma navzdol, če je a < 0.
- V **temenu** doseže funkcija **največjo vrednost** (maksimum), če je a < 0, oziroma **najmanjšo vrednost** (minimum), če je a > 0.

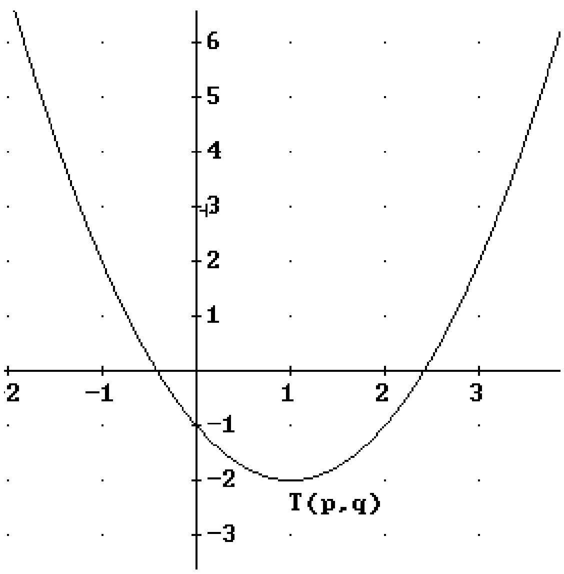
  $T(p,q)$, $p=\frac{-b}{2a}$, $q=c-\frac{b^2}{4a}$

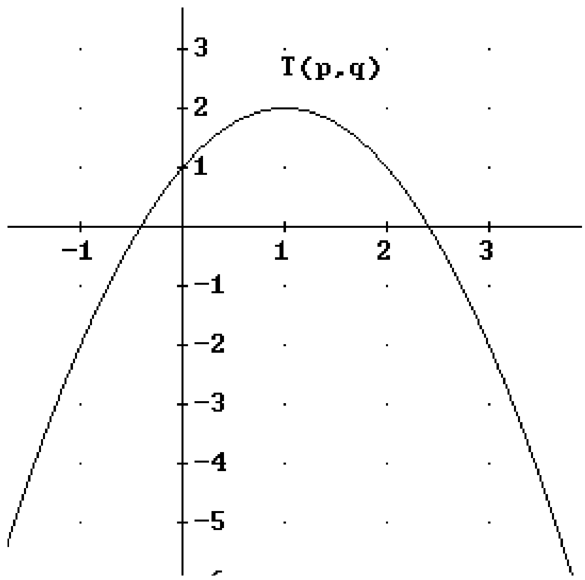
- **Ničli** kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ sta vrednosti spremenljivke x, pri katerih je f(x)=0. $ax^2+bx+c=0$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $D=b^2-4ac$

D > 0 ⇒ kvadratna funkcija ima dve različni realni ničli
D = 0 ⇒ kvadratna funkcija ima eno dvakratno realno ničlo
D < 0 ⇒ kvadratna funkcija nima realnih ničel

Graf **Graf** kvadratne funkcije je **parabola**, podana z enačbo $y=ax^2+bx+c$.

a>0 a < 0





Oblike kvadratne funkcije

Splošna: $f(x)=ax^2+bx+c$

$a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$

Temenska: $f(x)=a(x-p)^2+q$

$a,p,q\in\mathbb{R}, a\neq 0$

T(p,q)…teme parabole

Ničelna: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

x_1, x_2…ničli kvadratne funkcije

Eksponentna funkcija

Definicija

Eksponentna funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ je definirana s predpisom $f(x)=a^x, a\in\mathbb{R}^+, a\neq 1$.   (a…**osnova** eksponentne funkcije)

D_f, Z_f

Definicijsko območje je množica vseh realnih števil.
Zaloga vrednosti je množica vseh pozitivnih realnih števil.

Lastnosti

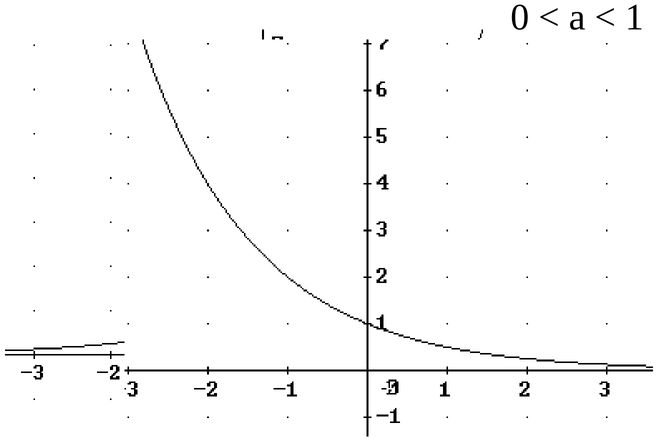
- **Graf funkcije** gre skozi točko T(0,1) (f(0) = 1).
- Funkcija je **povsod pozitivna** ($x\in\mathbb{R}, f(x)>0$).
- Za a>1 je funkcija **naraščajoča**, za 0<a<1 pa je funkcija **padajoča**.
- Funkcija je **navzgor neomejena**, **navzdol** pa **omejena** z vrednostjo 0 (asimptota y = 0).

Graf

Graf eksponentne funkcije je krivulja, podana z enačbo $y=a^x$.

a >1

0 < a < 1



Logaritemska funkcija

Definicija

Logaritemska funkcija $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ je definirana s predpisom $f(x)=\log_a x,\ a\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1$.

a…**osnova** logaritemske funkcije, x…**logaritmand**

D_f, Z_f

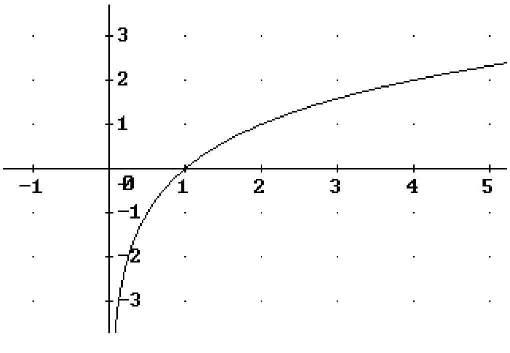
Definicijsko območje je množica vseh pozitivnih realnih števil.
Zaloga vrednosti je množica vseh realnih števil.

Lastnosti

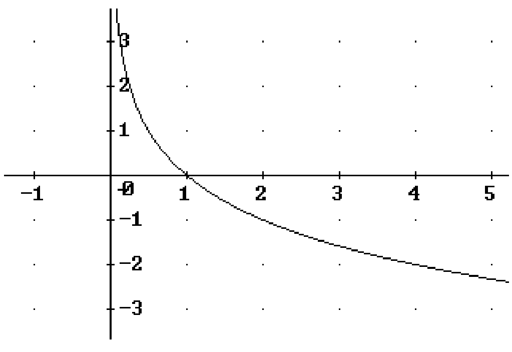
- $f(1)=\log_a 1=0$ (funkcija ima **ničlo** pri x=1).
- $f(a)=\log_a a=1$
- Za a>1 je funkcija **naraščajoča**.
  $0<x<1 \Rightarrow f(x)<0,\ x>1 \Rightarrow f(x)>0$
- Za 0<a<1 je funkcija **padajoča**.
  $0<x<1 \Rightarrow f(x)>0,\ x>1 \Rightarrow f(x)<0$
- Funkcija je **navzgor in navzdol neomejena**.

Graf logaritemske funkcije je krivulja, podana z enačbo $y=\log_a x$.

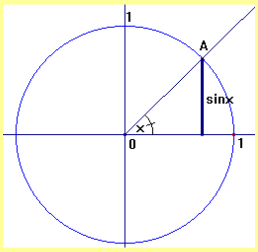
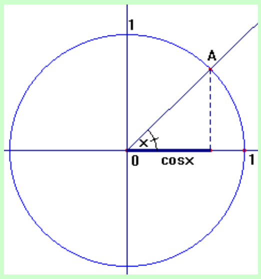
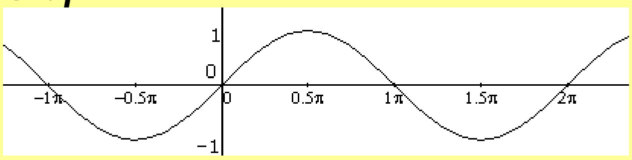
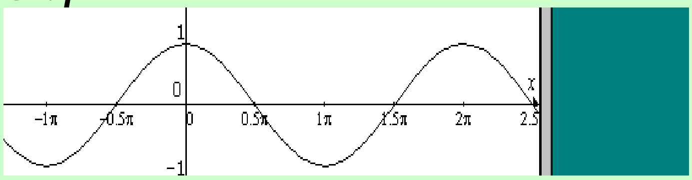
a>1

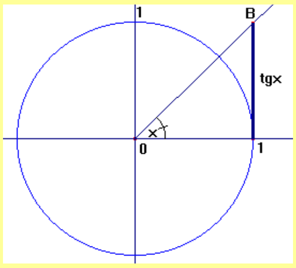
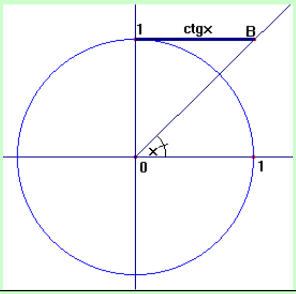
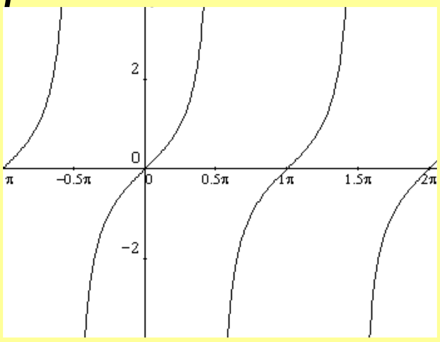
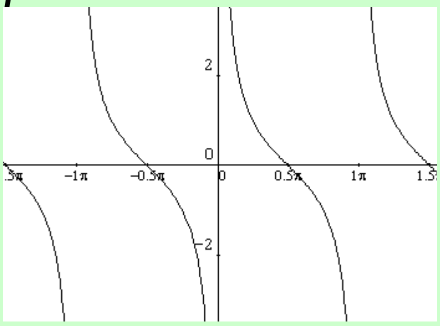


0<a<1



Kotne funkcije

Definicija	***Definicija***
Sinus kota x je **ordinata** točke A, v kateri gibljivi krak kota x seka enotsko krožnico. 	**Kosinus** kota x je **abscisa** točke A, v kateri gibljivi krak kota x seka enotsko krožnico. 
D_f, Z_f	***D_f, Z_f***
Definicijsko območje so vsa realna števila. **Zaloga vrednosti** je interval $[-1,1]$.	**Definicijsko območje** so vsa realna števila. **Zaloga vrednosti** je interval $[-1,1]$.
Graf 	***Graf*** 
Lastnosti • Je **periodična** funkcija z osnovno **periodo 2π** ($\sin(x+2k\pi)=\sin x, k\in\mathbb{Z}$). • Je **liha** funkcija ($\sin(-x)=-\sin x$). • Je **pozitivna** za kote v **prvem** in **drugem** kvadrantu in **negativna** za kote v **tretjem** in **četrtem** kvadrantu. • **Ničle**: $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • **Maksimumi**: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • **Minimumi**: $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • Je **omejena** funkcija, navzgor z vrednostjo 1 in navzdol z vrednostjo –1.	***Lastnosti*** • Je **periodična** funkcija z osnovno **periodo 2π** ($\cos(x+2k\pi)=\cos x, k\in\mathbb{Z}$). • Je **soda** funkcija ($\cos(-x)=\cos x$). • Je **pozitivna** za kote v **prvem** in **četrtem** kvadrantu in **negativna** za kote v **drugem** in **tretjem** kvadrantu. • **Ničle**: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • **Maksimumi**: $x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • **Minimumi**: $x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • Je **omejena** funkcija, navzgor z vrednostjo 1 in navzdol z vrednostjo –1.
Definicija	***Definicija***

Tangens kota x je **ordinata** točke B, v kateri nosilka gibljivega kraka kota x seka tangento na enotsko krožnico v točki (1,0).  	**Kotangens** kota x je **abscisa** točke B, v kateri nosilka gibljivega kraka kota x seka tangento na enotsko krožnico v točki (0,1). 
D_f, Z_f **Definirana** je za vsa realna števila, razen v polih. **Zaloga vrednosti** so vsa realna števila.	***D_f, Z_f*** **Definirana** je za vsa realna števila, razen v polih. **Zaloga vrednosti** so vsa realna števila.
Graf  	***Graf*** 
Lastnosti • Je **periodična** z osnovno **periodo π** ($tg(x+k\pi)=tg\,x, k\in\mathbb{Z}$). • Je **liha** funkcija ($tg(-x)=-tg\,x$). • Je **pozitivna** za kote v **prvem** in **tretjem** kvadrantu in **negativna** za kote v **drugem** in **četrtem** kvadrantu. • **Ničle**: $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • **Poli**: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • Je **naraščajoča** funkcija na vsem definicijskem območju. • Je **neomejena** funkcija.	***Lastnosti*** • Je **periodična** z osnovno **periodo π** ($ctg(x+k\pi)=ctg\,x, k\in\mathbb{Z}$). • Je **liha** funkcija ($ctg(-x)=-ctg\,x$). • Je **pozitivna** za kote v **prvem** in **tretjem** kvadrantu in **negativna** za kote v **drugem** in **četrtem** kvadrantu. • **Ničle**: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • **Poli**: $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ • Je **padajoča** funkcija na vsem definicijskem območju. • Je **neomejena** funkcija.

Polinomi

Definicija

Polinom je funkcija $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definirana s predpisom $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$; $a_n\neq 0,\ a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0\in\mathbb{R}$

a_n…**vodilni koeficient**
a_0…**konstantni člen** (začetna vrednost polinoma)
n…**stopnja polinoma**

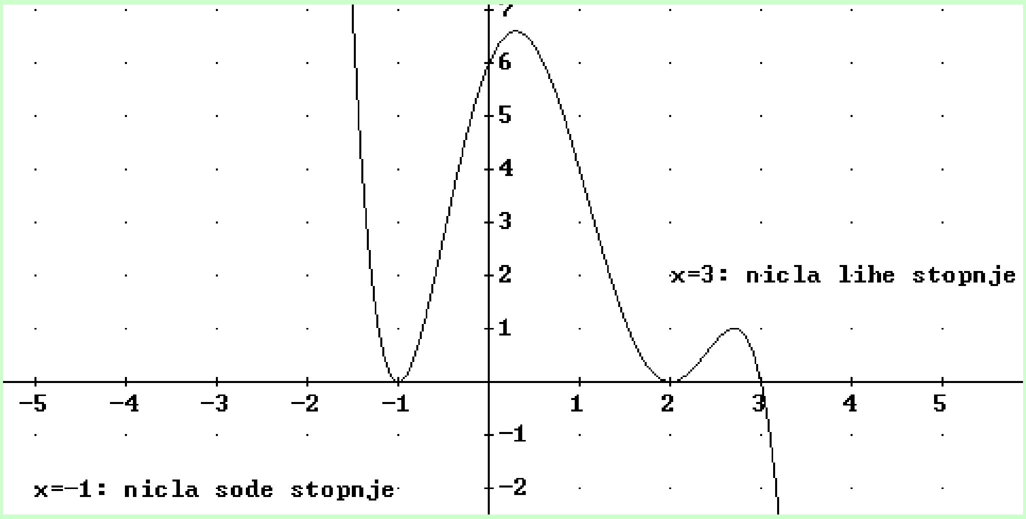
Lastnosti

- Polinom ni omejena funkcija.
- Ni periodična funkcija.
- Na nekaterih podintervalih je padajoča, na drugih naraščajoča funkcija.
- Nekateri polinomi so lihe, drugi sode funkcije, nekateri pa niti sode niti lihe funkcije.

Graf

Graf polinoma je **nepretrgana krivulja**, ki **seka abscisno os** v ničlah **lihe stopnje** (spremeni predznak).
V ničlah **sode stopnje** se **dotakne abscisne osi** (ohrani predznak).

Vedenje polinoma daleč od izhodišča določa **vodilni člen** a_nx^n.



Polinomi-posebnosti

Polinoma sta **enaka**, če sta enake stopnje in se ujemata v vseh istoležnih koeficientih.

Osnovni izrek o deljenju polinomov:

$$p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$$

k(x)…**količnik**
r(x)…**ostanek**

Osnovni izrek algebre:
Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti imvsaj eno kompleksno ničlo.

Posledice:
Kompleksne ničle polinoma z **realnimi koeficienti** nastopajo v **konjugiranih parih**.

Polinom **lihe stopnje z realnimi koeficienti** ima **vsaj eno realno ničlo**.

Polinom **n – te stopnje** ima **n ničel**.

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Če je racionalno število $\frac{c}{d}$ **ničla** polinoma p(x), potem c deli prosti člen a_0, d pa vodilni koeficient a_n.

Racionalne funkcije

Definicija

Racionalna funkcija $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ je količnik polinomov p in q.
p in q nimata skupnih ničel, q(x) ni identično enak 0.

Lastnosti

- **Definicijsko območje** so vsa realna števila razen ničel polinoma q(x).
- **Ničle** racionalne funkcije so ničle števca.
- **Poli** racionalne funkcije so ničle imenovalca.

(V vsakem polu ima graf racionalne funkcije navpično asimptoto.)

Graf

Racionalna funkcija spremeni predznak le v ničlah ali polih lihe stopnje.
Vedenje v neskončnosti:
Naj bo $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ in $q(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0$.

a) **n<m** ⇒ **y=0 vodoravna** asimptota grafa racionalne funkcije

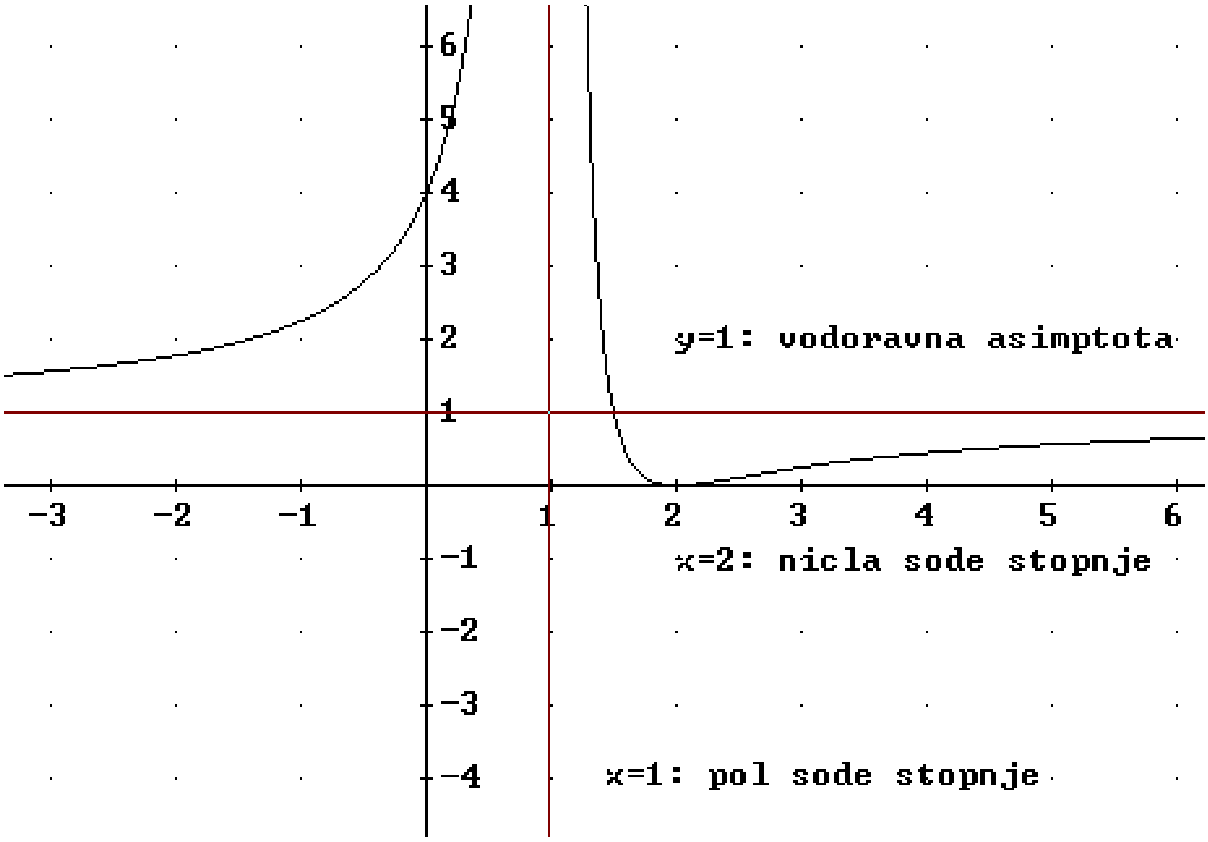
b) **n=m** ⇒ $y = \dfrac{a_n}{b_m}$ **vodoravna asimptota** grafa racionalne funkcije

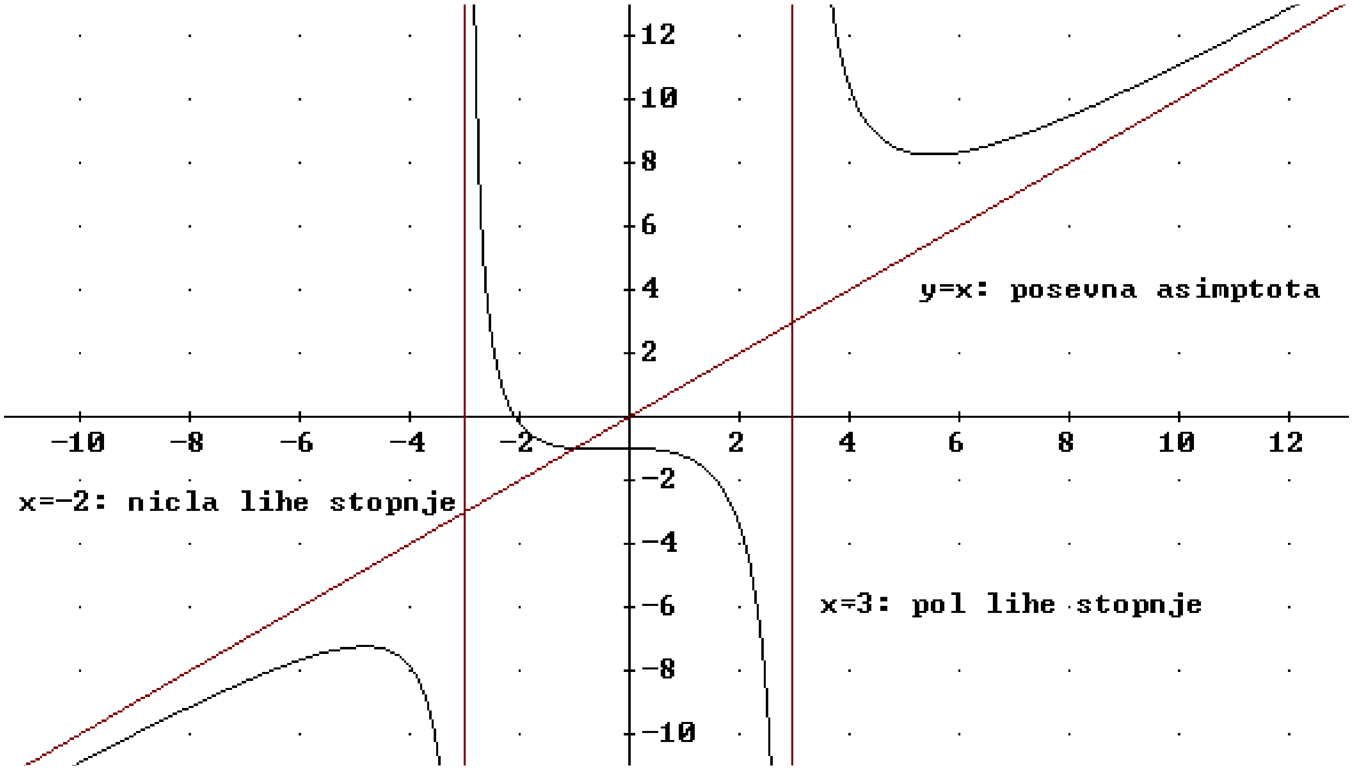
c) **n>m** ⇒ števec p delimo z imenovalcem q

$$p(x) = k(x)q(x) + r(x)$$

Krivulja y = k(x) je asimptota grafa racionalne funkcije.

(y = k(x) je premica ⇒ **poševna asimptota** grafa racionalne funkcije f.




12
10
8
6
4
2
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
12
-2
-4
-6
-8
-10
y=x: posevna asimptota
x=-2: nicla lihe stopnje
x=3: pol lihe stopnje