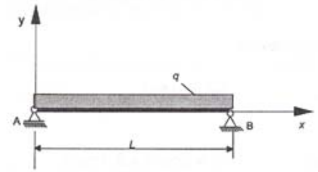
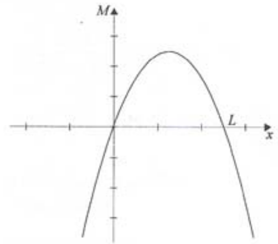
2. FUNKCIJE ENE SPREMENLJIVKE

PRIMER UPORABE FUNKCIJ

Upogibni moment



Slika 8: Nosilec

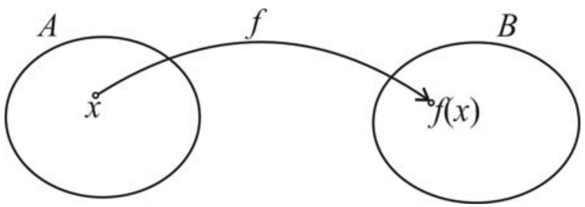


Slika 9: Graf funkcije upogibnega momenta vzdolž osi nosilca

$$T(x) = F_A - qx$$
$$M(X) = F_A x - \frac{qx^2}{2}$$

DEFINICIJA IN LASTNOSTI FUNKCIJE

Naj bosta A in B neprazni množici.
Enolična funkcija $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natanko določen (en sam) element iz množice B.



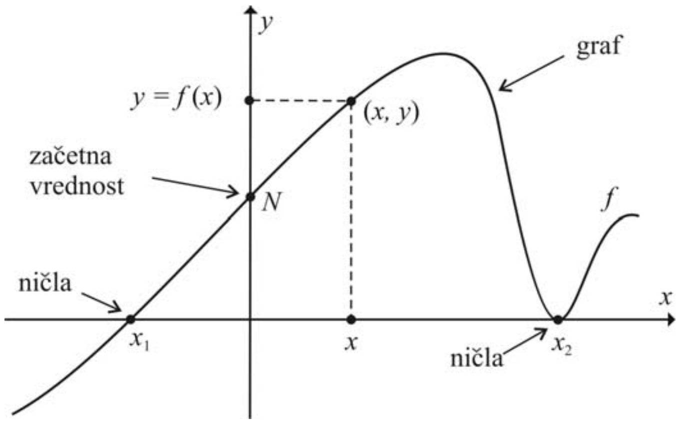
Večlična funkcija $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi enega ali več elementov iz množice B.

Element x iz množice A je **original** (tudi neodvisna spremenljivka), element $y = f(x)$ iz množice B pa **slika** (ali odvisna spremenljivka).

- **Definicijsko območje** funkcije f je množica vseh originalov funkcije. Označba: D_f. Po definiciji funkcije je $D_f = A$.
- **Zaloga vrednosti** funkcije f je množica vseh tistih elementov iz množice B, ki so slika vsaj enega elementa iz množice A. Označba: Z_f. Po definiciji funkcije je $Z_f \subseteq B$.

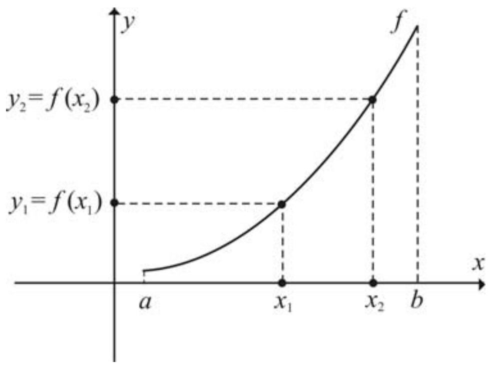
Če je $D_f \subset \mathbb{R}$ in $Z_f \subset \mathbb{R}$, imenujemo funkcijo **realna funkcija realne spremenljivke**, za katero lahko narišemo graf v pravokotnem koordinatnem sistemu v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Graf realne funkcije f je množica vseh urejenih parov (x, y) v pravokotnem koordinatnem sistemu v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kjer je $y = f(x)$ za vse x iz D_f.

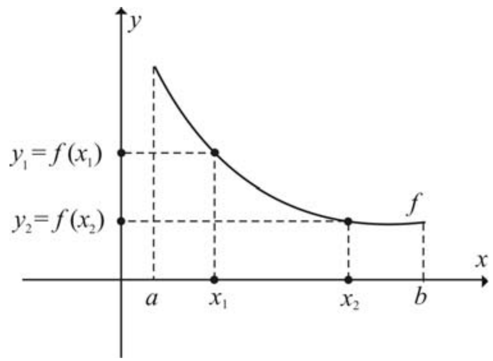


- **Ničla funkcije** f je točka x_0, v kateri ima funkcija f vrednost 0, torej $f(x_0) = 0$. Funkcija f v ničlah seka x os ali pa se je dotika.
- **Začetna vrednost** funkcije f je vrednost funkcije v točki $x = 0$, torej $f(0)$. Začetno vrednost pogosto zapišemo kot točko $N(0, f(0))$. Graf funkcije v točki N seka os y.

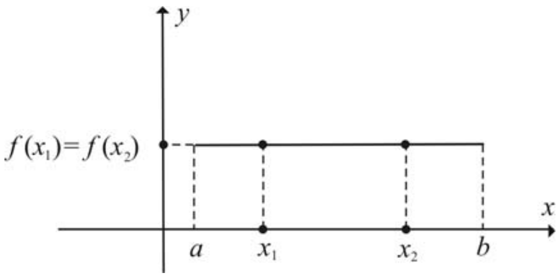
Funkcija f je **naraščajoča** na intervalu $[a, b]$, če za poljubni števili x_1 in x_2 iz tega intervala, za kateri velja $x_1 < x_2$, sledi: $f(x_1) \leq f(x_2)$.



Funkcija f je **padajoča** na intervalu $[a, b]$, če za poljubni števili x_1 in x_2 iz tega intervala, za kateri velja $x_1 < x_2$, sledi: $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Funkcija f je **konstantna** na intervalu $[a, b]$, če za poljubni števili x_1 in x_2 iz tega intervala velja $f(x_1) = f(x_2)$.



LINEARNA FUNKCIJA

Linearna funkcija je podana s predpisom $f(x) = kx + n$, kjer sta konstanti k in n poljubni realni števili.

- Konstanta k je **smerni koeficient** linearne funkcije. Če je $k > 0$, je funkcija naraščajoča, če je $k < 0$, je padajoča, in če je $k = 0$, je konstantana funkcija.
- Konstanta n je **začetna vrednost** linearne funkcije, ker je $f(0) = k \cdot 0 + n = n$.

Graf linearne funkcije je premica, ki jo najhitreje narišemo tako, da tabeliramo njene vrednosti. Dovolj je, če si izberemo dve poljubni različni vrednosti za x.

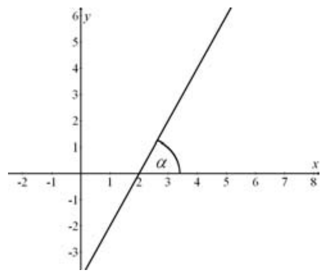
Za uporabo linearne funkcije v praktičnih primerih je zelo pomembno razumeti, da se pri povečanju vrednosti neodvisne spremenljivke za 1 vrednost odvisne spremenljivke spremeni za k, ker je:

$$f(x+1) = k(x+1) + n = kx + k + n = f(x) + k$$

Če poznamo smerni koeficient premice k in točko $A(x_1, y_1)$, ki leži na premici, lahko enačbo premice zapišemo po obrazcu:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Kot med premico in pozitivnim poltrakom osi x imenujemo naklonski kot premice in ga označimo z α.



Naklonski kot α lahko izrazimo s smernim koeficientom premice:

$$\tan \alpha = k$$

- če je $k \geq 0$, je $\alpha = \arctan k$,
- če je $k < 0$, je $\alpha = \arctan k + 180^o$.

Premici $y = k_1x + n_1$ in $y = k_2x + n_2$ sta **vzporedni** natanko takrat, ko imata enaka smerna koeficienta: $k_1 = k_2$.

Premici sta **pravokotni** natanko takrat, ko velja: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

PRIMER 1: Zapišite enačbo premice, ki poteka skozi točko $A(-3, 1)$ in je vzporedna s premico $y = 2x - 1$. Narišite sliko. Izračunajte še naklonska kota premic.

PRIMER 2: Enačba $v = v_0 + at$ podaja odvisnost hitrosti v od časa t pri premočrtnem gibanju s konstantnim pospeškom a. Narišite graf odvisnosti v od t, če je $a = 2\ \mathrm{ms}^{-2}$ in začetna hitrost $v_0 = 3\ \mathrm{ms}^{-1}$.

PRIMER 3: Primeri linearnih odvisnosti v mehaniki:

- $m = \rho V \quad (\rho$ konstanta)
- $F = ma \quad (m$ konstanta)
- $F_T = F_A - qx \quad (F_A$ in q konstanti)

KVADRATNA FUNKCIJA

Kvadratna funkcija je definirana s predpisom $f(x) = ax^2 + bx + c$, kjer so $a,\ b,\ c$ realna števila in $a \neq 0$.

Graf kvadratne funkcije je parabola, ki jo narišemo tako, da izračunamo ničli, če obstajata, teme in začetno vrednost funkcije.

- Ničli kvadratne funkcije sta rešitvi kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, ki jo rešimo tako, da kvadratni tričlenik razstavimo ali pa uporabimo formulo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Kvadratna funkcija ima lahko dve realni ničli, eno (dvojno) realno ničlo ali pa realnih ničel nima.

- Teme kvadratne funkcije je točka, v kateri zavzame funkcije največjo ali najmanjšo vrednost. Koordinati temena sta:

$$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

- Začetna vrednost kvadratne funkcije je $f(0) = c$.

PRIMER 4: Narišite graf kvadratne funkcije $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

PRIMER 5: Funkcija $s = s_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$ podaja odvisnost poti s od časa t pri enakomerno pospešenem gibanju.

POLINOMI

Polinom je definiran s predpisom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

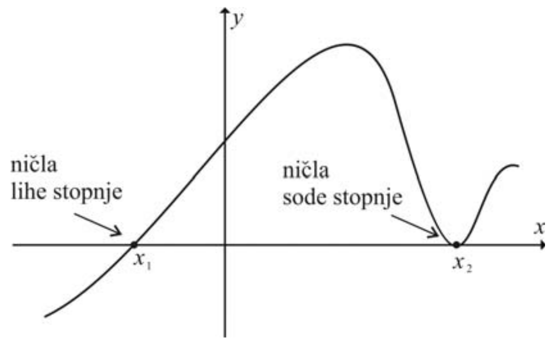
kjer so koeficienti $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots, a_2,\ a_1,\ a_0$ realna števila in $a_n \neq 0$. Naravno število n je stopnja polinoma.

Graf polinoma narišemo tako, da izračunamo njegove ničle, začetno vrednost in določimo njegovo obnašanje daleč stran od izhodišča koordinatnega sistema.

Ničle polinoma izračunamo tako, da polinom razstavimo ali pa si pomagamo s Hornerjevim algoritmom. Polinom n-te stopnje ima največ n realnih ničel.

Med ničlami polinoma ločimo ničle sode stopnje in ničle lihe stopnje.

- Ničla x_1 je **lihe stopnje**, če pri razcepu polinoma na linearne faktorje nastopa faktor $(x - x_1)^k$, kjer je k liho število. V ničli lihe stopnje graf polinoma seka os x.
- Ničla x_1 je **sode stopnje**, če pri razcepu polinoma na linearne faktorje nastopa faktor $(x - x_1)^k$, kjer je k sodo število. V ničli sode stopnje se graf polinoma dotika osi x.



Začetna vrednost polinoma je $p(0) = a_0$.

Obnašanje polinoma daleč stran od koordinatnega izhodišča določa njegov vodilni člen $a_n x^n$.

PRIMER 6: Narišite graf polinoma $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

PRIMER 7: Narišite graf polinoma $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

RACIONALNA FUNKCIJA

Racionalna funkcija je količnik dveh polinomov $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$.

Racionalna funkcija je definirana za vsa realna števila, razen v točkah, v katerih je imenovalec enak 0, $q(x) = 0$.

- Ničle racionalne funkcije so ničle števca: $p(x) = 0$. V ničlah lihe stopnje graf funkcije seka x os, v ničlah sode stopnje pa se je le dotakne.
- Poli racionalne funkcije so ničle imenovalca: $q(x) = 0$. Ko se vrednosti spremenljivke x bližajo polu, rastejo vrednosti funkcije čez vse meje, zato ima v polu graf funkcije navpično asimptoto, ki je nikoli ne seka. V okolici polov lihe stopnje funkcija zamenja predznak, v okolici polov sode stopnje pa predznak ohrani.

- Začetna vrednost racionalne funkcije je vrednost funkcije v točki $x = 0$, torej $f(0)$.
- Asimptota racionalne funkcije je krivulja, ki se ji daleč stran od koordinatnega izhodišča vrednosti racionalne funkcije približujejo, blizu koordinatnega izhodišča pa lahko graf racionalne funkcije asimptoto tudi seka.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{o(x)}{q(x)}$$

PRIMER 8: Narišite graf racionalne funkcije $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x-2}$.

PRIMER 9: Narišite graf racionalne funkcije $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-2}$.

PRIMER 10: (učbenik, str. 24) V toplotni tehniki zrak obravnavamo kot idealni plin, za katerega velja enačba stanja plina $pv = RT$, kjer je p tlak, v specifična prostornina, T temperatura, $R = 287.0$ J/kg K plinska konstanta. Skicirajte odvisnost tlaka v odvisnosti od specifične prostornine pri dveh izotermnih preobrazbah, in sicer za temperaturi $T_1 = 300$ K in $T_2 = 350$ K.

EKSPONENTNA FUNKCIJA

Eksponentna funkcija je definirana s predpisom $f(x) = a^x$, kjer je $a > 0$ in $a \neq 1$.

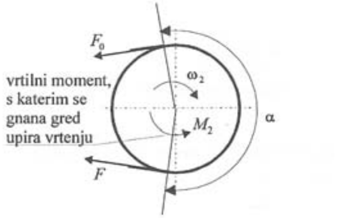
Poseben primer je eksponentna funkcija z osnovo e, kjer je e konstanta, katere približna vrednost je 2.72.

PRIMER 11: V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = 2^x$ in $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Lastnosti eksponentne funkcije $f(x) = a^x$:

- eksponentna funkcija je naraščajoča, če je $a > 1$, in padajoča, če je $0 < a < 1$;
- funkcija nima ničle, njena začetna vrednost je $f(0) = a^0 = 1$;
- os x je vodoravna asimptota funkcije;
- definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R}$ in zaloga vrednosti $Z_f = (0, \infty)$.

PRIMER 12: (učbenik, str. 28) Pri prenosu gibanja s ploščatim jermenom morata biti obe veji jermena napeti, razlika obeh sil pa povzroča moment za pogon gnane jermenice. Sila F v vlečni veji jermena je dana z enačbo $F = F_0 \cdot e^{\mu\alpha}$, kjer je F_0 zadrževalna sila v natekajoči veji jermena, μ količnik trenja med jermenom in jermenico, α pa objemni kot jermena (v radianih). S pomočjo grafa analizirajte vpliv objemnega kota na silo F pri treh različnih vrednostih količnika trenja: $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.3$ in $\mu_3 = 0$ pri stalni sili $F_0 = 200$ N.



Slika 25: Sile jermena na gnano jermenico

LOGARITEMSKA FUNKCIJA

Logaritemska funkcija $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ in $a \neq 1$, je inverzna funkcija k eksponentni funkciji $f(x) = a^x$:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Desetiški logaritem je logaritem z osnovo 10: $\log_{10} x = \log x$

Naravni logaritem je logaritem z osnovo e: $\log_e x = \ln x$

PRIMER 13: Izračunajte:

1. $\log_2 8$
2. $\log_2 16$
3. $\log_3 9$
4. $\log_3 \frac{1}{27}$

Pravila za logaritmiranje:

1. $\log_a a = 1$, ker $a^1 = a$
2. $\log_a 1 = 0$, ker $a^0 = 1$
3. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$
4. $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
5. $\log_a x^r = r \log_a x$
6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (prehod k novi osnovi)

Graf logaritemske funkcije narišemo tako, da narišemo točki $(a, 1)$ in $(1, 0)$ (po prvih dveh lastnostih). Graf logaritemske funkcije se približuje osi y.

PRIMER 14: Narišite grafa funkcij $f(x) = \log_2 x$ in $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

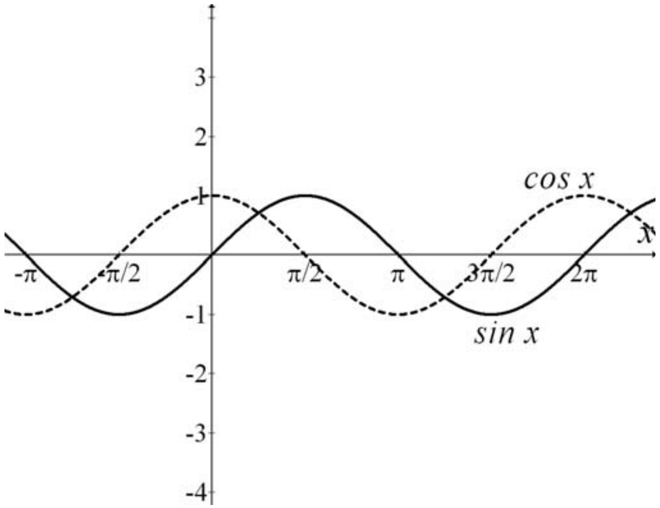
Lastnosti logaritemske funkcije $f(x) = \log_a x$:

- logaritemska funkcija je naraščajoča, če je $a > 1$, in padajoča, če je $0 < a < 1$;
- funkcija ima ničlo v točki $x = 1$, nima začetne vrednosti;
- os y je navpična asimptota funkcije;
- definicijsko območje je $D_f = (0, \infty)$ in zaloga vrednosti $Z_f = \mathbb{R}$.

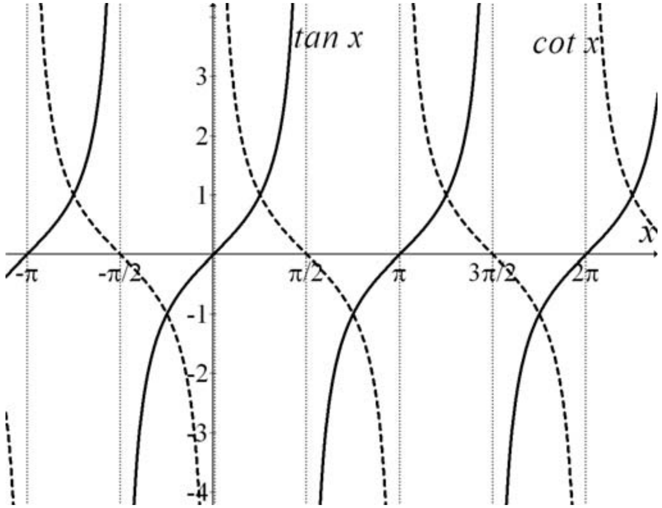
PRIMER 15: Iz obrazca $F = F_0 e^{\mu\alpha}$ izrazite α.

KOTNE ALI TRIGONOMETRIČNE FUNKCIJE

$f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x$



$f(x) = \tan x,\ f(x) = \cot x$



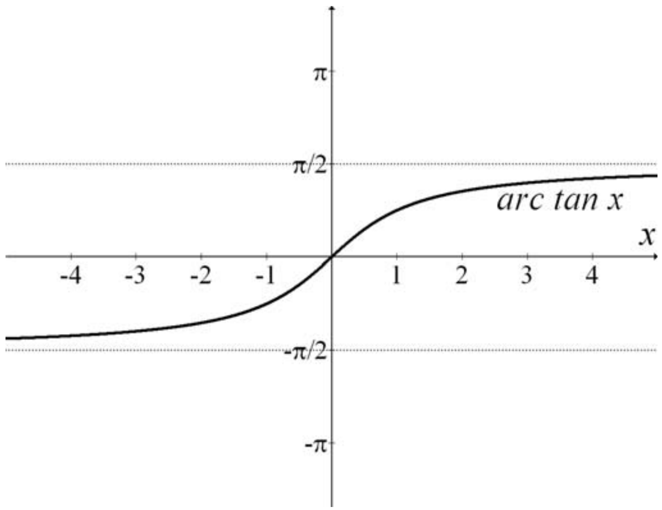
PRIMER 16: Narišite graf funkcije $f(x) = -3 \sin 2x$.

PRIMER 17: (učbenik, str. 31) Vrednost dela W, ki ga opravi sila F pri premikanju, izračunamo z enačbo $W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$, kjer je s pot, ki jo opravi sila, α kot med smernico sile in smerjo njenega premikanja. S pomočjo grafa analizirajte vpliv kota med smernico sile in smerjo premikanja na velikost dela.

Slika 30: Delo sile

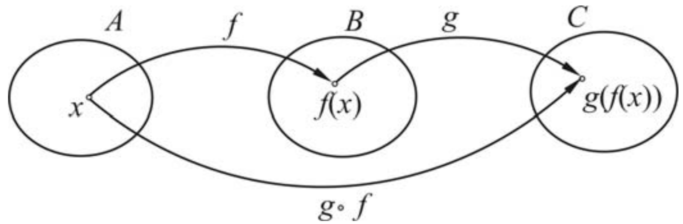
CIKLOMETRIČNE ALI KROŽNE FUNKCIJE

$f(x) = \arcsin x,\ f(x) = \arccos x,\ f(x) = \arctan x$



KOMPOZITUM FUNKCIJ

Vzemimo funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.



Kompozitum ali sestava funkcij $f : A \to B$ in $g : B \to C$ je funkcija $g \circ f$, ki elementom x iz množice A priredi slike $g(f(x))$ iz množice C.

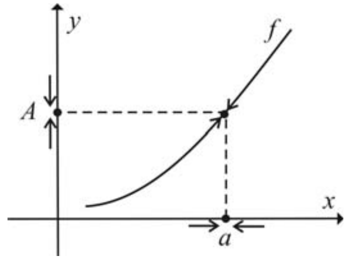
$g \circ f \neq f \circ g$

PRIMER 18: Dani sta funkciji $f(x) = x + 2$ in $g(x) = x^2$. Zapišite funkciji $g \circ f$ in $f \circ g$.

LIMITA FUNKCIJE

Vrednost A je **limita funkcije** f v točki $x = a$, če se vrednosti funkcije f poljubno približajo vrednosti A, ko se vrednosti x bližajo k vrednosti a. Limito zapišemo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{1}$$



PRIMER 19: Izračunajte $\lim_{x \to 3} x^2$.

Pravila za računanje z limitami:
Predpostavimo, da limiti $\lim_{x \to a} f(x)$ in $\lim_{x \to a} g(x)$ obstajata in sta končni. Tedaj velja:

1. $\lim\limits_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$, za vsak $k \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, če $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Z uporabo pravil lahko izračunamo tudi limite funkcij, ki v dani točki $x = a$ niso definirane.

PRIMER 20: Izračunajte $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

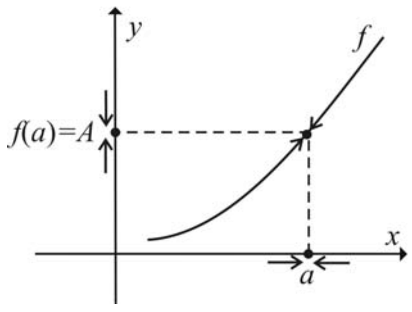
PRIMER 21: Izračunajte $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 9x}$.

PRIMER 22: Izračunajte $\lim\limits_{x \to \pi/2} \tan x$.

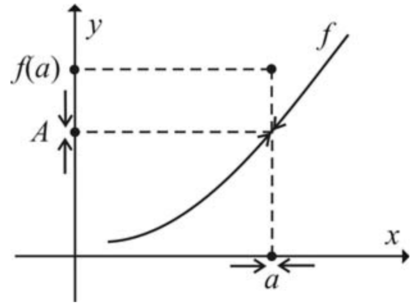
ZVEZNOST FUNKCIJ

Funkcija f je v točki $x = a$ **zvezna**, kadar je v tej točki definirana in je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

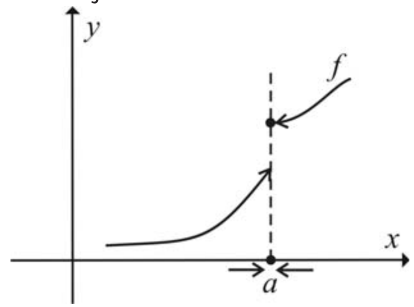
V večini primerov velja, da je funkcija f v točki $x = a$ zvezna, če je njen graf v tej točki nepretrgan.



funkcija je zvezna v točki $x = a$



funkcija ni zvezna v točki $x = a$

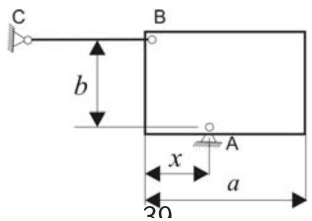


funkcija ni zvezna v točki $x = a$

UPORABA FUNKCIJ V MEHANIKI

PRIMER 23: Pravokotna plošča teže $F_g = 3$ kN je vrtljivo pritrjena v točki A, v točki B pa je členkasto pripeta s palico BC. Silo, s katero palica BC vleče ploščo, izračunamo po enačbi: $F = F_g \, \frac{a-2x}{2b}$.

- Skicirajte graf sile palice v odvisnosti od oddaljenosti x podpore A od levega roba plošče, če je $a = 4$ m in $b = 3$ m.
- Pojasnite, za katere x je naloga smiselna in pri katerih x palica ploščo vleče in pri katerih jo potiska.
- Iz grafa razberite in napišite, pri katerem x je sila F najmanjša in kolikšna je.



PRIMER 24: Za narisani primer je skupni moment vseh sil glede na točko A dan z enačbo: $M = F \cdot a \cdot \cos\alpha - F_g \frac{a}{2}$. Meri plošče sta $a = 2$ m in $b = 1.2$ m, teža plošče je $F_g = 1000$ N, velikost vlečne sile $F = 2000$ N, kot α, pod katerim deluje sila, pa spreminjamo.

- Tabelarično prikažite odvisnost momenta M od kota α za kote od 0° do 180°.
- Skicirajte graf momenta za navedeno območje kota α.
- Pri kolikšnem kotu α je moment največji?
- Pri kolikšnem kotu α je moment enak 0?