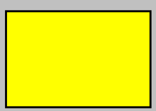
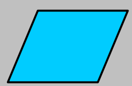
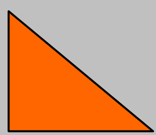
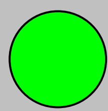
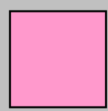
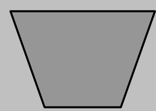
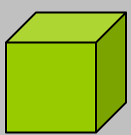
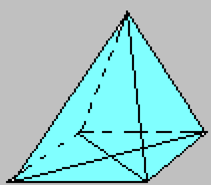
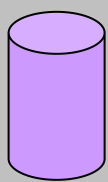
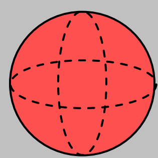
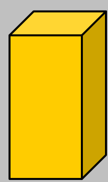
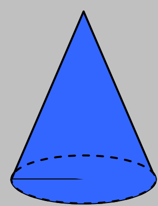
GEOMETRIJA

1. naloga: Poimenujte geometrijske like in telesa:

					
pravokotnik	romb	trikotnik	krog	kvadrat	trapez
					
kocka	piramida	valj	krogla	kvader	stožec

Skripta za matematiko v 2. letniku srednjega poklicnega, srednjega strokovnega in poklicno tehniškega izobraževanja

– INTERNO GRADIVO –

GEOMETRIJA
Skripta za matematiko v 2. letniku srednjega poklicnega, srednjega strokovnega in poklicno tehniškega izobraževanja

Gradivo je namenjeno interni uporabi pri pouku matematike na Srednji poklicni in strokovni šoli Bežigrad – Ljubljana in je fotokopiranje prepovedano.

Avtorja: **Nikolaj LIPIČ in Mojca ROŽIČ**

Institucija: **Srednja poklicna in strokovna šola Bežigrad - Ljubljana**

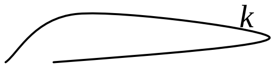
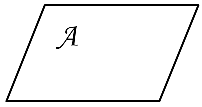
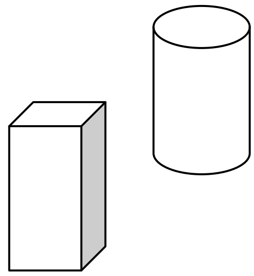
Programi: **srednjega poklicnega, srednjega strokovnega in poklicno tehniškega izobraževanja**

Uporabo je odobrila ravnateljica/direktorica **Fani AL-MANSOUR.**

VSEBINA

UVOD V GEOMETRIJO

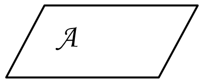
GEOMETRIJA
- je ena najstarejših vej matematike, ki se ukvarja s točkami, premicami, ploskvami in telesi ter proučuje njihove lastnosti in odnose v prostoru.

točke	črte	ploskve	telesa
- predstavimo jih s piko ali majhnim krožcem. *Oznaka*: velike tiskane črke °*A* °*B* °*C*	- so množice točk, ki imajo eno samo razsežnost. *Oznaka*: male tiskane črke *Ločimo*: a) sklenjene črte  b) nesklenjene črte  Med črtami so posebno pomembne **premice**.	- so geometrijski objekti, ki imajo dve razsežnosti. Med ploskvami so posebno pomembne **ravnine**. *Oznaka ravnin:* velike pisane črke 	- so geometrijski objekti, ki imajo tri razsežnosti. 

Beseda je grškega izvora in pomeni »*merjenje zemlje*«. Merjenje zemljišč in izračunavanje njihove površine po vsakoletnih poplavah reke Nil v Egiptu je pospešilo razvoj geometrije. Ob tem pa je veliko geometrijskega znanja zahtevala gradnja templjev in piramid …
Evklid (iz Aleksandrije v Egiptu) je najbolj znani matematik, ki se je ukvarjal z geometrijo prostora, Njegovo delo je zbrano v 13 zvezkih knjige Elementi (Stoicheia).

1. OSNOVNI POJMI RAVNINSKE GEOMETRIJE

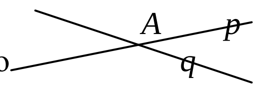
a) **RAVNINA** – je ravna ploskev, ki se na obe strani razteza v neskončnost.



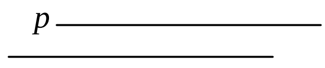
b) **PREMICA** – je ravna črta, ki se na obe strani razteza v neskončnost. Oznake: male črke (p, q ...)

Velja: **Obstaja natanko ena premica, ki gre skozi dve (različni) dani točki ravnine**.

Medsebojna lega premic v ravnini:

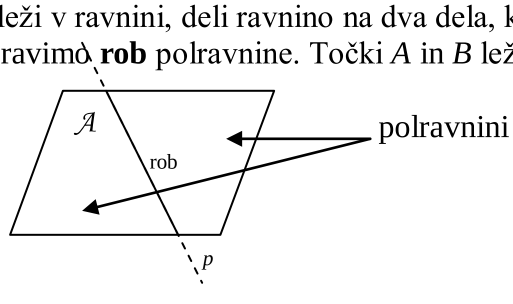


1. Premici imata eno skupno točko. Pravimo, da se premici sekata, in skupno točko imenujemo presečišče premic.
2. Premici ležita na isti ravnini in nimata skupne točke. Pravimo, da sta premici vzporedni. Oznaka: $p \parallel q$.

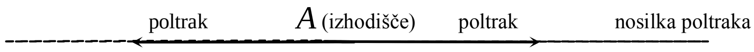


3. Premici ne ležita v isti ravnini in nimata skupne. Pravimo, da sta premici mimobežni.

c) **POLRAVNINA**: vsaka premica, ki leži v ravnini, deli ravnino na dva dela, ki ju imenujemo **polravnini**. Premici v tem primeru pravimo **rob** polravnine. Točki A in B ležita na polravnini, če daljica AB ne seka roba polravnine.



d) **POLTRAK**: točka, ki leži na premici, le-to razdeli na dva dela, ki ju imenujemo **poltraka**. Točko v tem primeru imenujemo **izhodišče** poltraka.



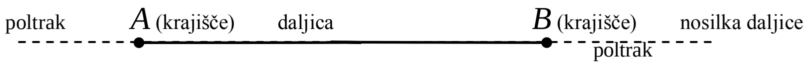
Ločimo:

1. Odprti poltrak – izhodišče ne štejemo k poltraku.
2. Zaprt poltrak – izhodišče štejemo k poltraku.

Oznaka poltrakov: male tiskane črke (ponavadi h, k, l…)

Številska premica: število 0 številsko premico razdeli na *pozitivni* in *negativni* poltrak številske premice.

e) **DALJICA**: če na premici ležita dve točki, npr. *A* in *B*, v tem primeru točki razdelita premico na tri dele.Omejeni del, to je del premice, ki leži med točkama A in B, imenujemo **daljica** s krajiščem *A* in *B*.Obe **krajišči** *A* in *B* štejemo k daljici.

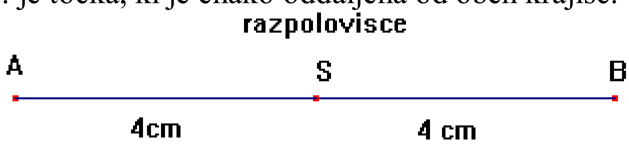


Oznaka daljice: daljica *AB*

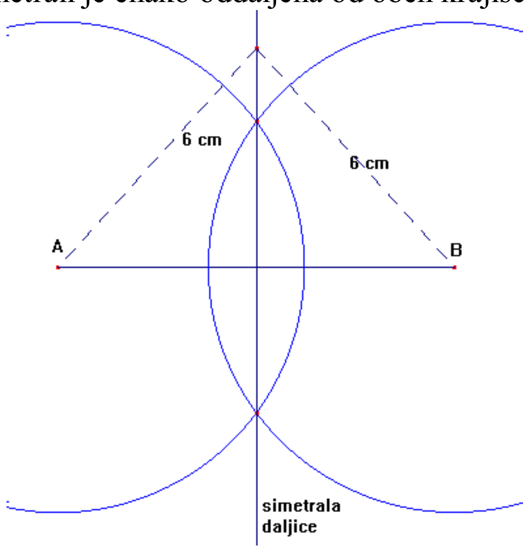
f) **DOLŽINA DALJICE IN RAZDALJA MED DVEMA TOČKAMA**:

- **Dolžino daljice** s krajiščema *A* in *B* označimo kot $\overline{AB}$. Osnovna dolžinska mera je meter.
- **Razdalja** med točkama *A* in *B* je dolžina daljice *AB*.

Razpolovišče daljice: je točka, ki je enako oddaljena od obeh krajišč.



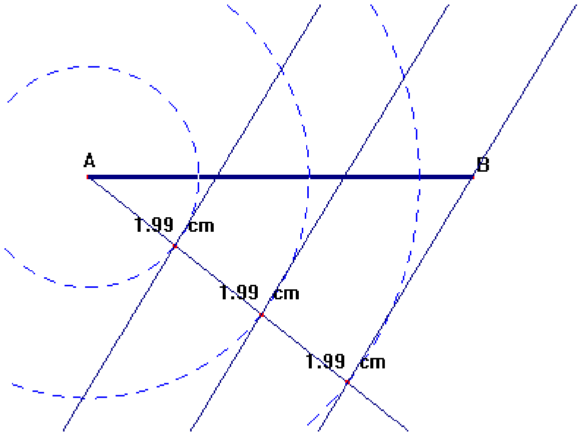
- **SIMETRALA DALJICE:**
  - je premica, ki je pravokotna na daljico in daljico razpolavlja na dva enaka dela
  - poljubna točka na simetrali je enako oddaljena od obeh krajišč daljice



Konstrukcija simetrale daljice:

- v šestilo vzamemo razdaljo večjo od polovice dolžine daljice in narišemo krožna loka s središčema v krajiščih A in B
- skozi presečišči lokov narišemo simetralo daljice

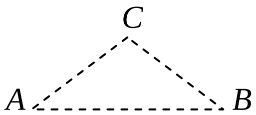
- **DELITEV DALJICE NA N SKLADNIH DELOV:**
  - iz prvega krajišča narišemo poltrak
  - na poltrak nanesemo s šestilom n poljubnih razdalj
  - zadnji lok povežemo z drugim krajiščem daljice, nato pa narišemo vzporednice skozi ostale loke



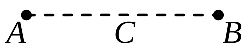
Skladnost daljic:
Dve daljici sta skladni, če sta enako dolgi.

Trikotniška neenakost:

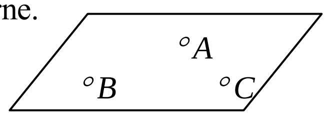
- če so A, B, C poljubne točke velja: $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}$.



Opomba: enačaj velja le v primeru, če je C točka daljice AB. V tem primeru pravimo, da so točke A, B, C kolinearne (točke ležijo na isti premici).

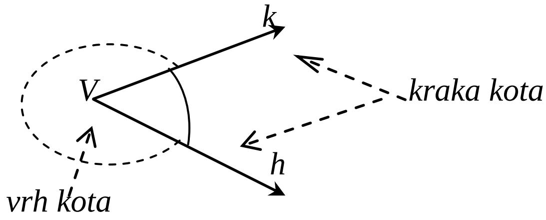


Velja tudi: če točke A, B, C ležijo na isti ravnini, so komplanarne.

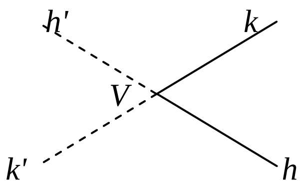
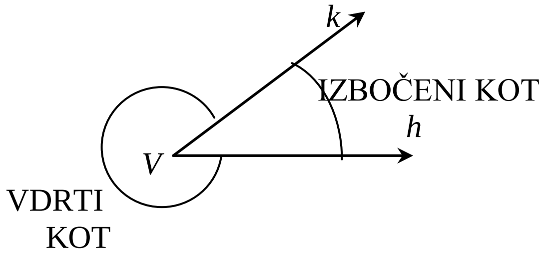
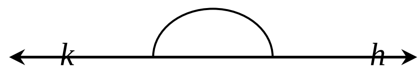
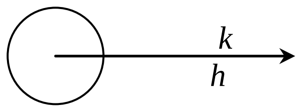
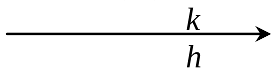


2. KOT

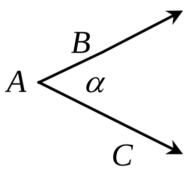
Dva poltraka s skupnim izhodiščem delita ravnino na dva dela, ki ju imenujemo **kota**.



Ločimo dve možnosti:

1. kraka ne ležita na isti premici	2. kraka ležita na isti premici
 *V tem primeru poznamo dva kota:* 	*V tem primeru poznamo tri kote:* a) IZTEGNJENI KOT (180°)  b) POLNI KOT (360°)  c) NIČELNI KOT (0°) 

OZNAČEVANJE KOTOV:



a) $\sphericalangle BAC$ ali $\sphericalangle CAB$
Opomba: oznako vrha kota moramo vedno zapisati kot srednjo črko

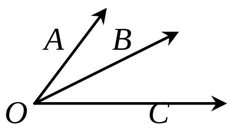
b) $\sphericalangle A$
Opomba: dovolj samo ena črka, če je na sliki narisan samo en kot.

c) α ali $\sphericalangle \alpha$ ..… uporaba grških črk
$(\alpha,\beta,\chi,\delta,\varepsilon,\phi,\varphi,\gamma,\eta,\iota,\kappa,\lambda,\mu,\nu,o,\pi,\varpi,\theta,\vartheta,\rho,\sigma,\varsigma,\tau,\upsilon,\omega,\xi,\psi,\zeta)$

POZNAMO ŠE NASLEDNJE VRSTE KOTOV:

1. *SOSEDNJA KOTA*

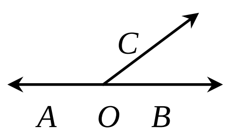
$\sphericalangle AOC - in - \sphericalangle BOC$



Sosednja kota sta kota, ki imata en skupen krak in ležita na nasprotnih straneh skupnega kraka.

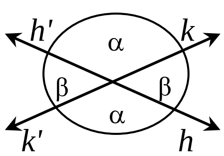
2. *SOKOTA*

$\sphericalangle AOC - in - \sphericalangle BOC$

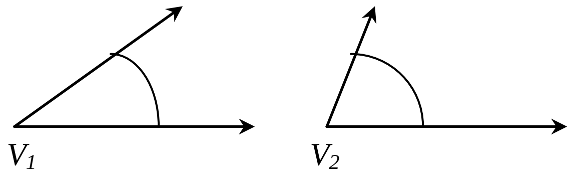


Sokota sta sosednja kota, ki skupaj tvorita iztegnjeni kot (180°).

3. *SOVRŠNA KOTA*

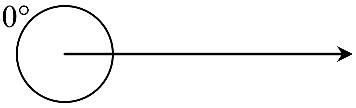


MERJENJE KOTOV



Izmed izbočenih kotov na sliki je kot $\angle V_2$ **večji**, ker sta njegova kraka širše razprta kot kraka kota $\angle V_1$.

Osnova enota za merjenje velikosti kotov je **kotna stopinja** (1°). To je kot, ki ustreza $\frac{1}{360}$ polnega kota.



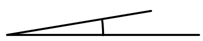
Manjši enoti za merjenje kotov sta:

a) **kotna minuta** (1') 1° = 60'

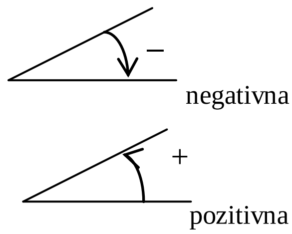
b) **kotna sekunda** (1") 1° = 3600" in 1' = 60"

Za risanje in merjenje kotov uporabljamo **kotomer**.

VELIKOSTI NEKATERIH KOTOV:

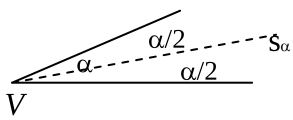
Vrsta kota	Velikost
Polni kot	360°
Iztegnjeni kot	180°
Izbočeni kot	manj kot 180°
Vdrti kot	več kot 180°
Sovršna kota	sta enaka
Sokota	skupaj 180°
Pravi kot	90°
Ostri kot	manj kot 90° 
Topi kot	več kot 90° 
Komplementarna kota	- sta kota, ki skupaj merita 90°: $\alpha + \beta = 180°$
Suplementarna kota	- sta kota, ki skupaj merita 180°: $\alpha + \beta = 180°$

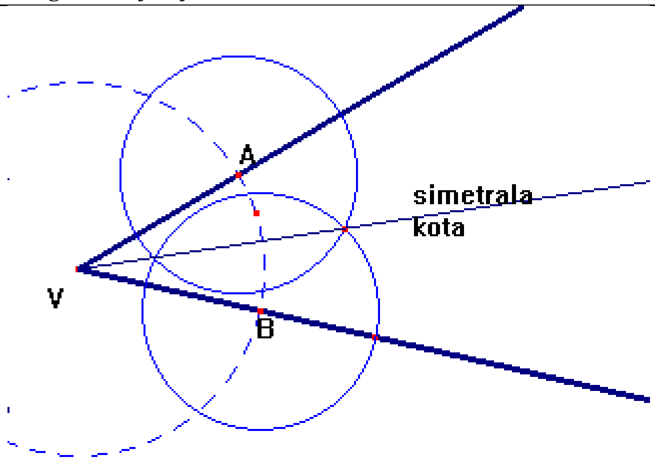
ORIENTACIJA KOTA:



SIMETRALA KOTA:

- je poltrak z začetkom v vrhu kota, ki razdeli dani kot na dva enaka kota
- poljubna točka na simetrali je enako oddaljena od obeh krakov kota



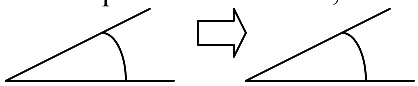


Konstrukcija simetrale kota:

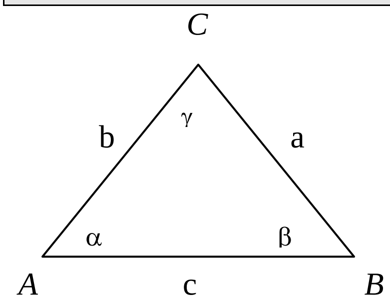
- v šestilo vzamemo poljubno razdaljo in narišemo krožni loka s središčem v vrhu kota, nato narišemo krožna loka s središčema v točkah A in B (presečišče kraka in prvega loka)
- skozi presečišči lokov narišemo simetralo kota

SKLADNA KOTA

Dva enako velika kota sta skladna, če ju lahko premaknemo tako, da drug drugega natanko prekrijeta.



5. TRIKOTNIK



A, *B*, *C* – oglišča trikotnika (tri nekolinearne točke)
a, b, c – stranice trikotnika
α, β, γ – notranji koti

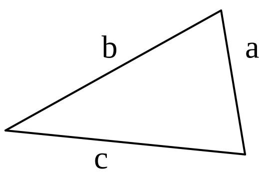
1. Odnosi med trikotnikovimi stranicami

Trikotniška neenakost: $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$ *ali drugače*: c < a + b

Velja: Vsaka stranica trikotnika je krajša od vsote dolžin ostalih dveh stranic. *Ali drugače*:
Vsaka stranica trikotnika je daljša od razlike dolžin ostalih dveh stranic.

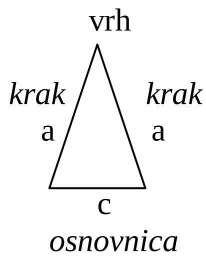
2. Delitev trikotnikov po dolžinah stranic

Raznostranični trikotnik



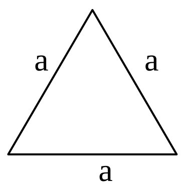
- dolžine njegovih stranic so med seboj različne.

Enakokraki trikotnik



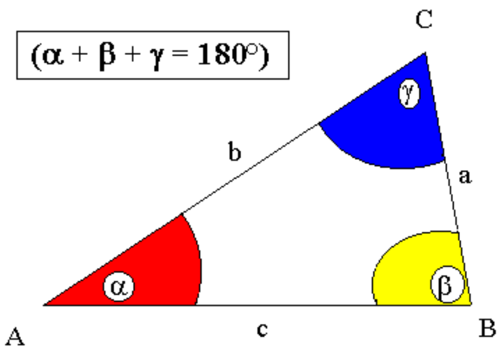
- vsaj dve stranici sta enako dolgi.

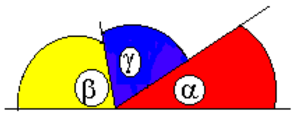
Enakostranični trikotnik

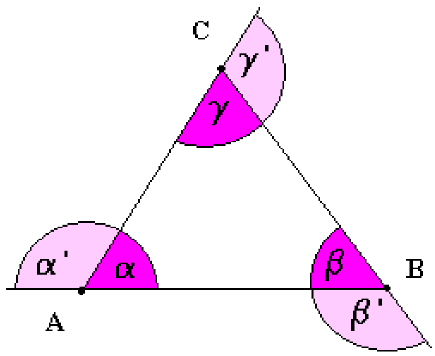


- vse njegove stranice so enako dolge.

3. Odnosi med koti v trikotniku







Vsota notranjih kotov trikotnika je enaka 180 °.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Vsota zunanjih kotov trikotnika je enaka 360°.

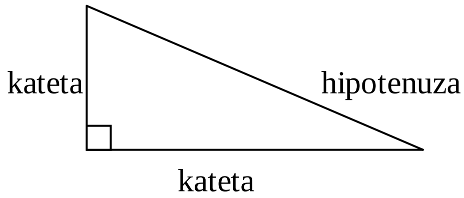
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$

4. Delitev trikotnikov glede na velikost največjega kota

V trikotniku sta vedno dva kota ostra.

Glede na velikost tretjega kota delimo trikotnike v tri skupine:

a) ostrokoten trikotnik - ima vse tri kote ostre.
b) topokoten trikotnik – ima en topi kot in dva ostra kota.
c) pravokotni trikotnik – ima en pravi kot (90°) in dva ostra kota.



5. Odnosi med stranicami in koti v trikotniku

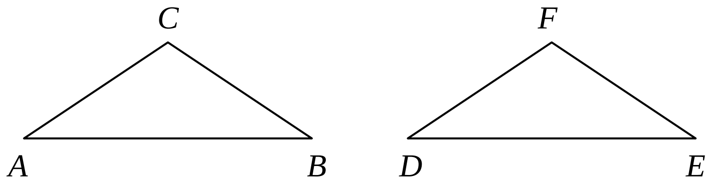
Velja: V trikotniku ležijo nasproti enako dolgih stranic enako veliki koti.
V trikotniku leži večji stranici nasproti večji kot.

Uporaba:

1. V enakostraničnem trikotniku so vsi trije koti enaki. Vsak meri 60°.
2. V enakokrakem trikotniku sta kota ob osnovnici enaka.
3. Hipotenuza je najdaljša stranica pravokotnega trikotnika.
4. Ostra kota v enakokrakem pravokotnem trikotniku merita po 45°.

5. 1 SKLADNOST TRIKOTNIKOV

Dva trikotnika sta skladna, kadar lahko enega natanko prekrijemo z drugim ali z zrcalno sliko drugega. **V***elja*: **Skladna trikotnika imata paroma skladne stranice in paroma skladne kote. Skladni koti ležе skladnim stranicam nasproti.**



Trikotnik *ABC* je skladen trikotniku *DEF*.

Krajše zapišemo: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Skladnostni izreki za trikotnike:

1. Trikotnika sta skladna, če se ujemata v vseh treh stranicah.
2. Trikotnika sta skladna, če se ujemata v dveh stranicah in v kotu, ki ga ti dve stranici oklepata.
3. Trikotnika sta skladna, če se ujemata v eni stranici in v obeh kotih, ki sta priležna tej stranici.
4. Pravokotna trikotnika sta skladna, če se ujemata v hipotenuzi in v eni od katet.

Nekaj uporabe skladnostnih izrekov:

a) <u>Simetrala daljice</u>

- je premica, ki poteka skozi razpolovišče daljice pravokotno da daljico.

Velja: Poljubna točka na simetrali daljice je enako oddaljena od krajišč daljice.

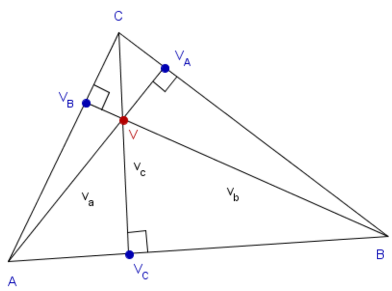
b) <u>Simetrala kota</u>

- je poltrak, ki razdeli kot na dva enaka kota.

Velja: Poljubna točka kotne simetrale je enako oddaljena od krakov kota.

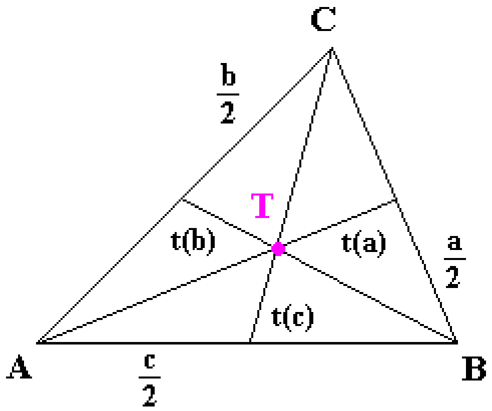
c) <u>Višine in višinska točka v trikotniku</u>

Višina na stranico trikotnika je daljica, ki povezuje oglišče z nasprotno stranico in je pravokotna nanjo. Njena dolžina je razdalja oglišča od nasprotne stranice. V poljubnem trikotniku potekajo premice, na katerih ležijo višine trikotnika, skozi isto točko *V*. Ta točka se imenuje višinska točka trikotnika.



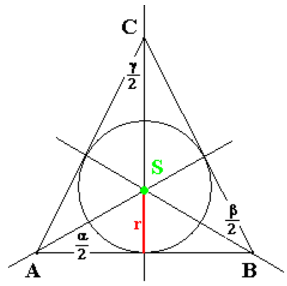
d) Težiščnice in težišče trikotnika

Težiščnica na stranico v trikotniku je daljica, ki povezuje oglišče z razpoloviščem nasproti ležeče stranice. V poljubnem trikotniku potekajo vse tri težiščnice skozi isto točko *T*, ki jo imenujemo težišče trikotnika. Težišče *T* deli težiščnice v razmerju 2:1.



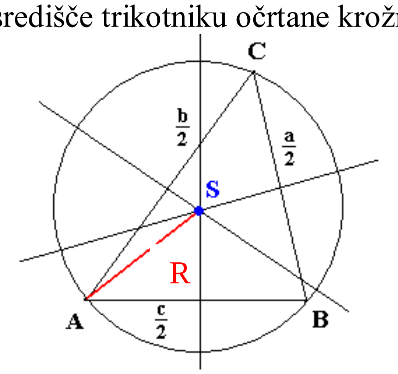
e) Simetrale trikotnikovih kotov

Simetrale trikotnikovih kotov se sekajo v isti točki znotraj trikotnika. Ta točka je enako oddaljena od stranic trikotnika. Ta točka predstavlja središče trikotniku včrtane krožnice.



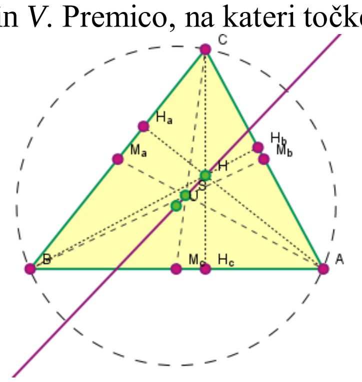
f) Simetrale trikotnikovih stranic

Simetrale trikotnikovih stranic potekajo skozi isto točko *O*. Ta točka je enako oddaljena od oglišč trikotnika. Ta točka predstavlja tudi središče trikotniku očrtane krožnice.



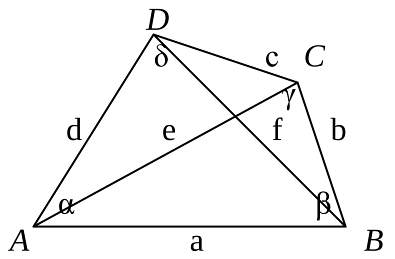
g) Eulerjeva premica

V vsakem trikotniku leže višinska točka *V*, težišče *T* in presečišče *O* simetral trikotnikovih stranic na isti premici. Pri tem leži *T* vedno med *O* in *V*. Premico, na kateri točke leže, imenujemo Eulerjeva premica.



6. ŠTIRIKOTNIK

Štirikotnik je večkotnik s štirimi stranicami.



A, B, C, D – oglišča štirikotnika
a, b, c, d – stranice štirikotnika
α, β, γ, δ – notranji koti štirikotnika
a in c, b in d – para nasprotnih stranic
A in *C*, *B* in *D* – para nasprotnih oglišč
a in b, b in c, c in d, d in a – pari sosednjih stranic
A in *B*, *B* in *C*, *C* in *D*, *D* in *A*– pari sosednjih oglišč
e, f – diagonali

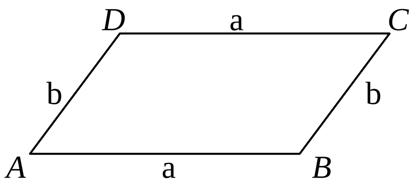
Velja:

1. V poljubnem štirikotniku je vsota notranjih kotov 360°: $\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^{\circ}}$
2. Diagonala štirikotnika je daljica, ki veže dve nesosednji oglišči. Poljuben štirikotnik ima dve diagonali. V štirikotniku *ABCD* sta to daljici *AC* = e in *BD* = f.

Štirikotnike delimo glede na število parov vzporednih stranic v tri skupine:

1. *paralelograme*, ki imajo dva para vzporednih stranic,
2. *trapeze*, ki imajo en par vzporednih stranic,
3. *trapezoide* (deltoid), ki nimajo nobenega para vzporednih stranic.

1. PARALELOGRAM



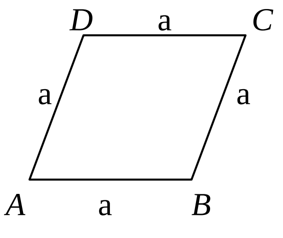
a∥a b∥b

Paralelogram je štirikotnik, ki ima **dva para vzporednih stranic**.

Štirikotnik je paralelogram natanko takrat, ko:

a) ima en par enako dolgih in vzporednih stranic,
b) sta nasprotni stranici sta enako dolgi,
c) sta nasprotna kota enako velika, sosednja pa suplementarna (vsota dveh sosednjih kotov je 180°),
d) se diagonali paralelograma *AC* = e in *BD* = f razpolavljata.

2. ROMB



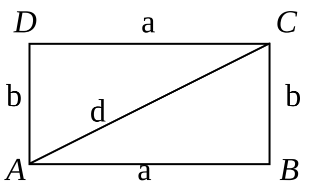
Romb je paralelogram, ki ima **vse stranice enako dolge**.

V rombu velja:

a) Diagonali romba se sekata pod pravim kotom (90°).
b) Diagonali romba razpolavljata notranje kote.

a∥a, e ⊥ f

3. PRAVOKOTNIK



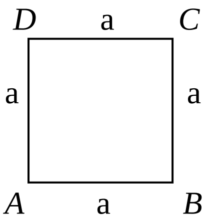
Pravokotnik je paralelogram, ki ima **notranje kote prave**.

Za pravokotnik velja:

a) Diagonali pravokotnika (d) sta enako dolgi.
b) Stranici pravokotnika sta hkrati tudi njegovi višini.

a∥a b∥b

4. KVADRAT



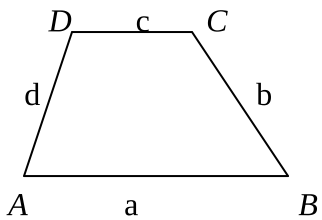
Kvadrat je pravokotnik, ki ima **vse stranice enako dolge**.

Za kvadrat velja:

a) Diagonali kvadrata (d) sta enako dolgi in druga drugo pravokotno razpolavljata.
b) Višina kvadrata je enaka stranici kvadrata.

a∥a

5. TRAPEZ



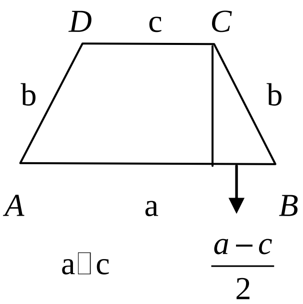
a∥c

Trapez je štirikotnik, ki ima **en par vzporednih stranic**.

V trapezu velja:

a) Stranici, ki sta vzporedni, imenujemo osnovnici trapeza.
b) Nevzporedni stranici sta kraka trapeza.
c) Trapez, ki ima nevzporedni stranici enako dolgi, imenujemo enakokraki trapez.
d) Trapez je pravokotni, če je kakšen od njegovih kotov pravi (90^{o}).
e) Srednjica trapeza (s) je daljica, ki povezuje razpolovišči krakov trapeza. Srednjica je vzporedna osnovnicama. Njena dolžina je: $s = \frac{1}{2}(a + c)$.
f) Kota ob krakih sta suplementarna: $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^{o}$.

ENAKOKRAKI TRAPEZ

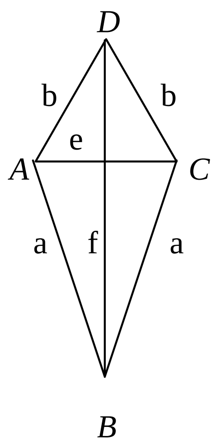


Enakokraki trapez je trapez, ki ima **oba kraka enako dolga**.

V enakokrakem trapezu velja:

a) Kota ob osnovnici sta enako velika.
b) Diagonali sta enako dolgi.

6. DELTOID



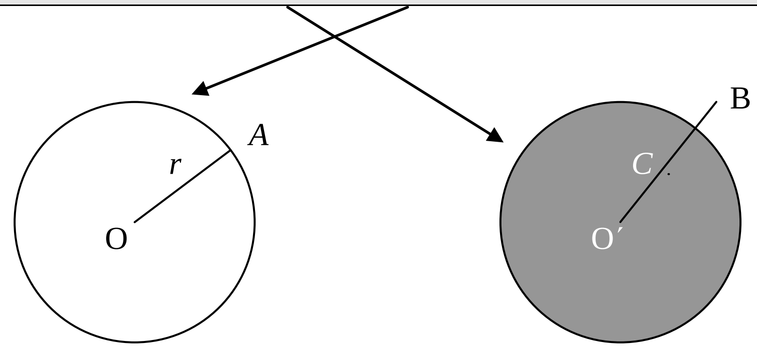
Deltoid je štirikotnik, ki ima **dva para enako dolgih sosednjih stranic.**

V deltoidu velja:

a) Diagonali se sekata pravokotno.
b) Diagonala, ki veže tisti krajišči deltoida, v katerih se stikata enako dolgi stranici, razpolavlja drugo.
c) Če je diagonala *BD* = f simetrala deltoida, potem razpolavlja notranja kota pri ogliščih *B* in *D*.

e ⊥ f

7. KROG IN KROŽNICA



Krožnica je množica vseh točk v ravnini, ki so enako oddaljene od središča krožnice.

Razdaljo od središča do točk krožnice imenujemo **polmer krožnice**.

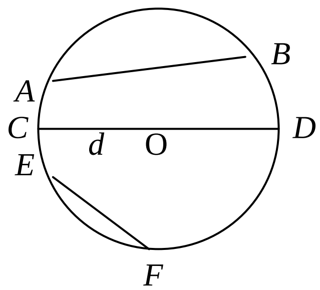
O – središče krožnice
r – polmer krožnice
A – točka, ki leži na krožnici

Krog je del ravnine, omejen s krožnico.

O´ – središče krožnice
C – notranja točka krožnice
B – zunanja točka krožnice

Tetiva krožnice

Premer krožnice

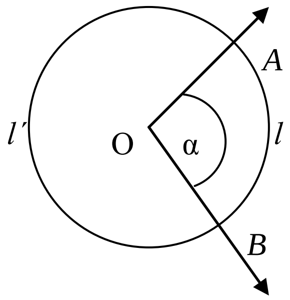


Tetiva krožnice je daljica, ki povezuje poljubni točki krožnice.
AB, CD, EF – tetive

Tetiva, ki poteka skozi središče krožnice, imenujemo **premer krožnice**. Premer krožnice je najdaljša tetiva krožnice. Označimo ga z *d*.

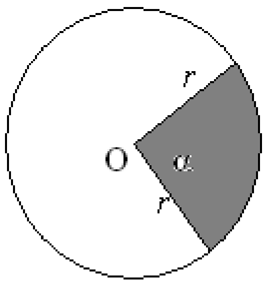
Središčni kot α

Krožni lok l



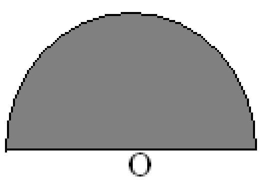
Središčni kot krožnice je kot, ki ima vrh v središču krožnice. Njegova kraka sekata krožnico v dveh točkah *A* in *B*.
Ti dve točki razdelita krožnico na dva dela, ki ju imenujemo **krožna loka** s krajiščema *A* in *B*.
Tisti od obeh lokov, ki leži znotraj središčnega kota, je **središčnemu kotu pripadajoči lok *l***.
Drugi lok je temu loku **nasprotni** lok *l´*.

Krožni izsek

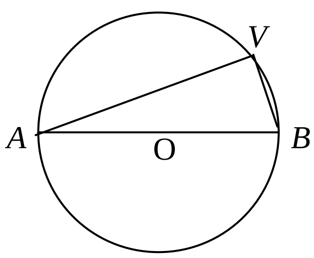


Krožni izsek je del kroga, ki ga omejujejo krožni lok in polmera do njegovih krajišč.

Polkrog



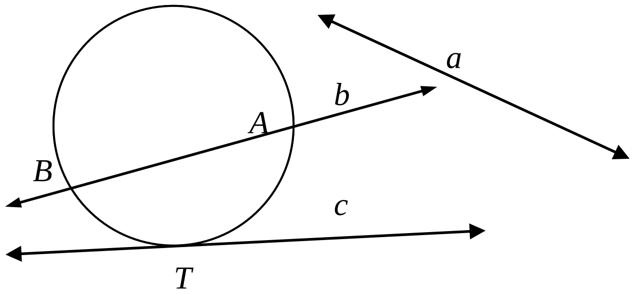
Obodni kot $\sphericalangle$ *AVB*



Obodni kot krožnice je kot, ki ima vrh v poljubni točki krožnice, njegova kraka pa potekata tako, da krožnico sekata.

Velja: **Vsak obodni kot nad premerom krožnice je pravi kot.**

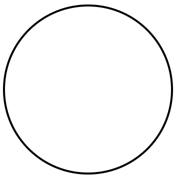
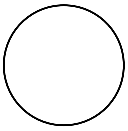
MEDSEBOJNA LEGA KROŽNICE IN PREMICE



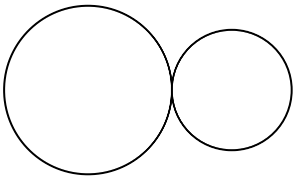
a – **mimobežnica** (nima skupne točke s krožnico)
b – **sekanta** (s krožnico ima dve skupni točki *A*, *B*)
c – **tangenta** (s krožnico ima eno skupno točko in se krožnice dotika. To točko imenujemo dotikališče)
T – dotikališče

Velja: **Tangenta je v dotikališču pravokotna na polmer krožnice.**

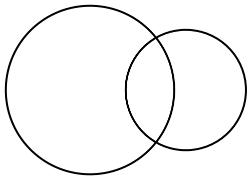
MEDSEBOJNA LEGA DVEH KROŽNIC

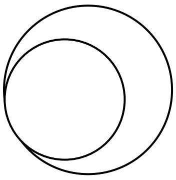
Krožnici ležita druga izven druge.



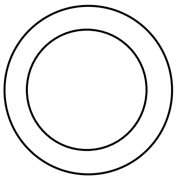
Krožnici se dotikata od zunaj.



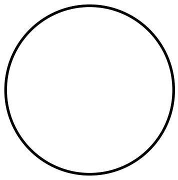
Krožnici se sekata.



Krožnici se dotikata od znotraj.

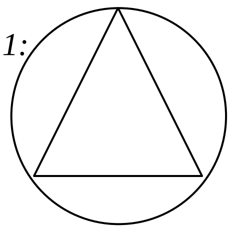
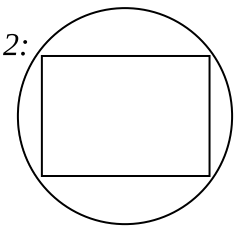
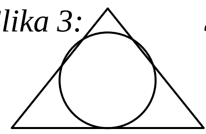
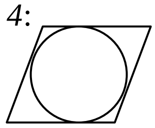


Manjša krožnica leži znotraj večje krožnice.



Krožnici se prekrivata.

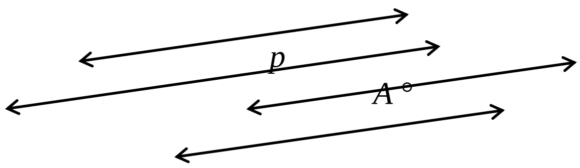
7.1 KROŽNICA IN VEČKOTNIK

Večkotniku očrtana krožnica	Večkotniku včrtana krožnica
Če vsa oglišča nekega večkotnika leže na isti krožnici, pravimo, da je krožnica večkotniku **očrtana**. Večkotnike, ki jim krožnice lahko očrtamo, imenujmo **tetivni večkotniki**, ker so njihove stranice tetive očrtane krožnice. *Primeri:* a) <u>poljubni trikotniki</u> *Velja:* Poljubnemu trikotniku lahko očrtamo krožnico. Njeno središče je presečišče simetral trikotnikovih stranic. *(slika 1)* b) <u>poljubni pravokotniki</u> *Velja:* poljubnemu pravokotniku lahko očrtamo krožnico. Njeno središče je presečišče pravokotnikovih diagonal. *(slika 2)* *Slika 1:*  *Slika 2:* 	Če se stranice večkotnika dotikajo iste krožnice, pravimo, da je krožnica temu večkotniku **včrtana**. Večkotniku, ki jim krožnico lahko včrtamo, imenujemo **tangentni večkotniki**, ker so njihove stranice tangente iste krožnice. *Primeri:* a) <u>poljubni trikotniki</u> *Velja:* Poljubnemu trikotniku lahko včrtamo krožnico. Njeno središče je presečišče kotnih simetral trikotnika. *(slika 3)* b) <u>poljubni romb</u> *Velja:* poljubnemu rombu lahko včrtamo krožnico. Njeno središče je presečišče rombovih diagonal. *(slika 4)* *Slika 3:*  *Slika 4:* 

8. VZPOREDNE IN PRAVOKOTNE PREMICE

8.1. VZPOREDNE PREMICE

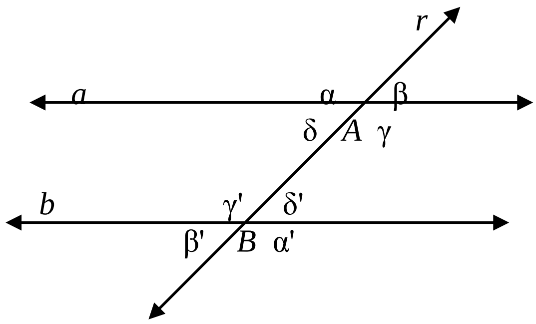
Vzporedne premice iz iste ravnine, ki sta brez skupne točke, smo imenovali **vzporedni premici** ali **vzporednici**.



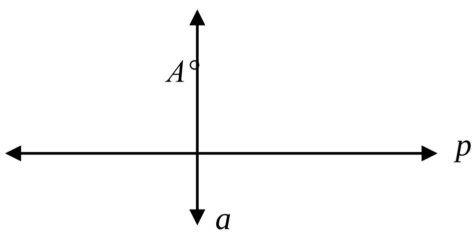
Dani premici v ravnini lahko narišemo nešteto vzporednic.
Skozi dano točko *A*, ki ne leži na premici *p*, poteka natanko ena premica, ki je vzporedna premici *p*.

8.1.1. Koti ob prečnici

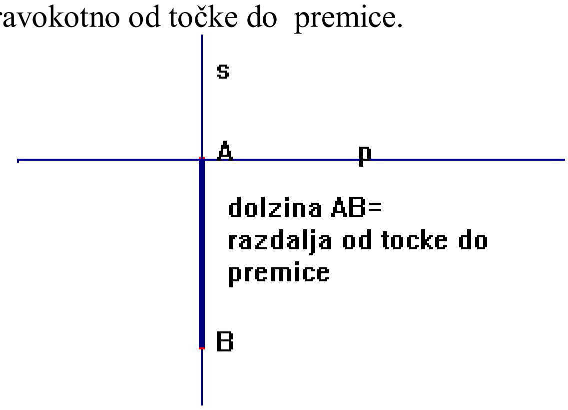
Kote lahko razdelimo v pare **izmeničnih kotov**.
Pravimo, da sta dva kota izmenična, če velja:
a) eden od kotov ima vrh v *A*, drugi vrh *B*.
b) kota ležita bodisi oba v pasu med vzporednicama *a* in *b* bodisi oba zunaj njega.
c) kota ležita na nasprotnih straneh prečnice *r*.
Na sliki so izmenični naslednji pari kotov: $\alpha-\alpha', \beta-\beta', \chi-\chi', \delta-\delta'$
Velja: $\alpha=\alpha', \beta=\beta', \chi=\chi', \delta=\delta'$



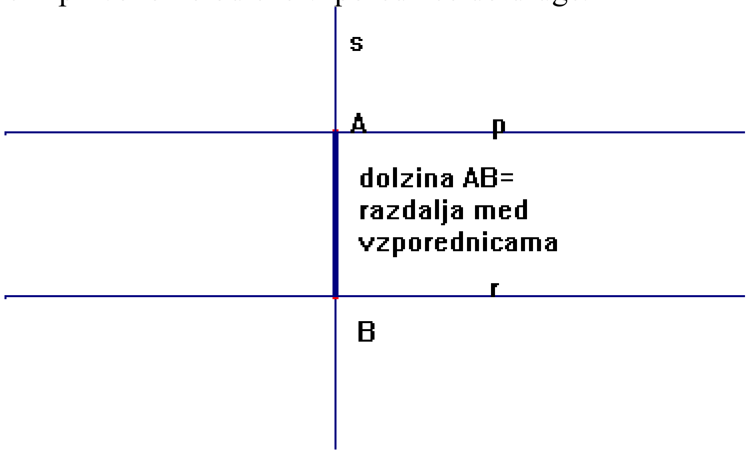
8.2. PRAVOKOTNI PREMICI

Pravimo, da sta dve premici druga na drugo **pravokotni**, če se sekata tako, da razdelita ravnino na štiri prave kote. Skozi dano točko *A* poteka natanko ena premica *a*, ki je pravokotna na dano premico *p*. Dani premici v ravnini lahko narišemo nešteto pravokotnic. Premice, ki so pravokotne na isto premico so med seboj vzporedne.	

<u>Razdalja točke do premice:</u>
Je dolžina daljice, ki poteka pravokotno od točke do premice.



Razdalja med dvema vzporednicama:
Je dolžina daljice, ki poteka pravokotno od ene vzporednice do druge.



9. VEČKOTNIKI

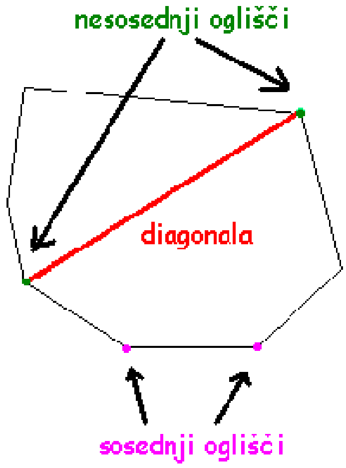
Večkotnik je lik, ki je omejen s tremi ali z več daljicami. Poimenujemo ga po številu stranic, oglišč ali kotov; n-kotnik ima n oglišč, n stranic in n kotov ($n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}$).

SOSEDNJI OGLIŠČI povezuje stranica.

NESOSEDNJI OGLIŠČI ne omejujeta iste stranice.

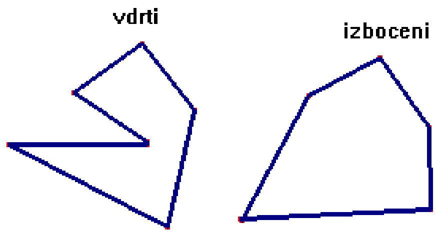
SOSEDNJI STRANICI imata skupno oglišče.

NESOSEDNJI STRANICI nimata skupnega oglišča.

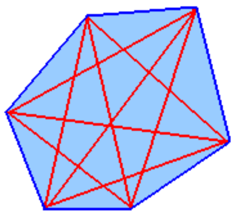


Večkotnike delimo na:

- **Izbočene** ali konveksne:
- **Vdrte** ali konkavne:



Diagonala povezuje dve nesosednji oglišči večkotnika. V izbočenem večkotniku so diagonale vedno znotraj večkotnika.
Šestkotnik z vsemi diagonalami:



ŠTEVILO DIAGONAL IZ ENEGA OGLIŠČA:

Vsako oglišče n-kotnika ima dve sosednji oglišči in (n - 3) nesosednjih oglišč. Število diagonal iz enega oglišča je za tri manjše od števila vseh oglišč.

Vsa oglišča – (izbrano oglišče + 2 sosednji oglišči) = št. Diagonal iz enega oglišča

$$\mathbf{n - 3}$$

ŠTEVILO RAZLIČNIH DIAGONAL:

Vsa oglišča * (vsa oglišča - 3)/2 = število vseh diagonal

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

NOTRANJI KOTI:

Večkotnik razdelimo z diagonalami, ki se ne sekajo, na trikotnike. Število nastalih trikotnikov je vedno za dve manjše od števila oglišč. Vsoto notranjih kotov večkotnika dobimo, če število nastalih trikotnikov pomnožimo s 180^0.

(n – 2) · 180^0= vsota notranjih kotov poljubnega n- kotnika

ZUNANJI KOTI:

Vsota zunanjih kotov v poljubnem večkotniku je vedno 360^0.

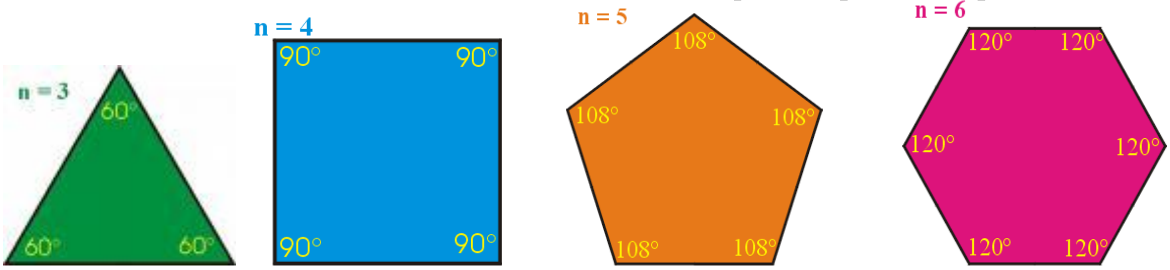
SKLADNOST:

Večkotnika sta skladna, kadar enega lahko natanko prekrijemo z drugim. Stranice so paroma skladne, prav tako tudi koti.

9.1. PRAVILNI VEČKOTNIKI

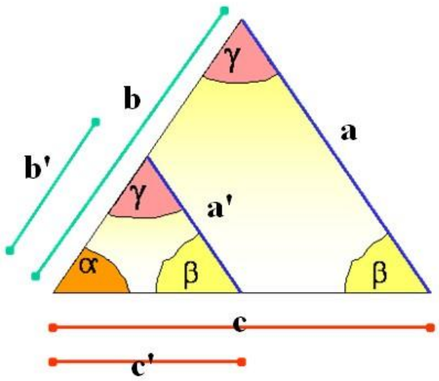
Pravilni večkotniki imajo vse stranice enako dolge in vse notranje kote skladne. Vsi so izbočeni (konveksni). Pravilnemu večkotniku lahko včtramo in očrtamo krog. Središčni kot, ki pripada stranici večkotnika meri 360°/n.

Pravilni večkotniki so: enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni petkotnik, pravilni šestkotnik,….



10. PODOBNOST

Trikotnika ΔABC in $\Delta A'B'C'$ sta **podobna**, če se ujemata v vseh treh kotih: $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$.
Podobnost označimo z znakom ~, torej: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
Stranici trikotnika, ki ležita nasproti enakima kotoma imenujemo **istoležni ali enakoležni stranici.**
Podobna trikotnika imata stranice v enakem razmerju, torej:
$a':a = b':b = c':c$ oziroma $a':b':c' = a:b:c$



Vrednost razmerja med istoležnima stranicama imenujemo **koeficient podobnosti** *k*:
$a':a = k,\quad b':b = k,\quad c':c = k$
oziroma:
$a' = ak,\quad b' = bk,\quad c' = ck.$

Dva trikotnika sta si podobna:
- če se ujemata v dveh notranjih kotih
- v razmerjih po dveh istoležnih stranic: $a':a = b':b = c':c$ =k
- v razmerju dveh stranic ($b':b = c':c$) in kotu med njima (α)

11. KOTNE FUNKCIJE OSTRIH KOTOV

12. OBSEGI IN PLOŠČINE

12.1. DOLŽINSKE ENOTE IN PRETVARJANJE

Osnovna merska enota za merjenje dolžine, širine in višine je **meter (m)**. Za merjenje dolžine (širine, višine) predmetov uporabljamo tudi druge merske enote: **milimeter (mm), centimeter (cm), decimeter (dm), kilometer (km).**

ENOTE ZA DOLŽINO:

- MILIMETER mm 1 mm
- CENTI METER cm 1 cm = 10 mm
- DECIMETER dm 1 dm = 10 cm = 100 mm
- METER m 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
- KILOMETER km 1 km = 1000 m

	km			m	dm	cm	mm
	1	0	2	0	0	4	0

1020,04 m = 1km 20m 4cm =1,02004 km = 102 004 cm

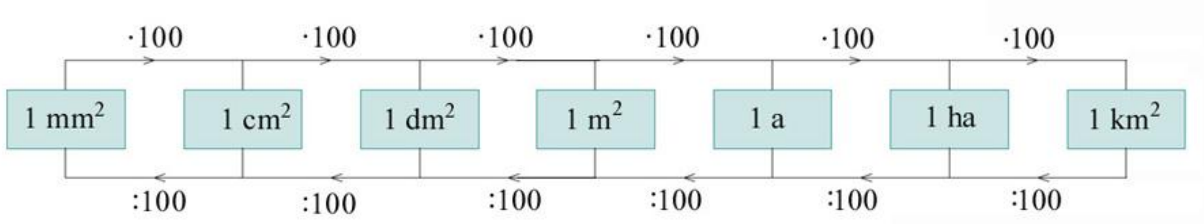
1 milimeter

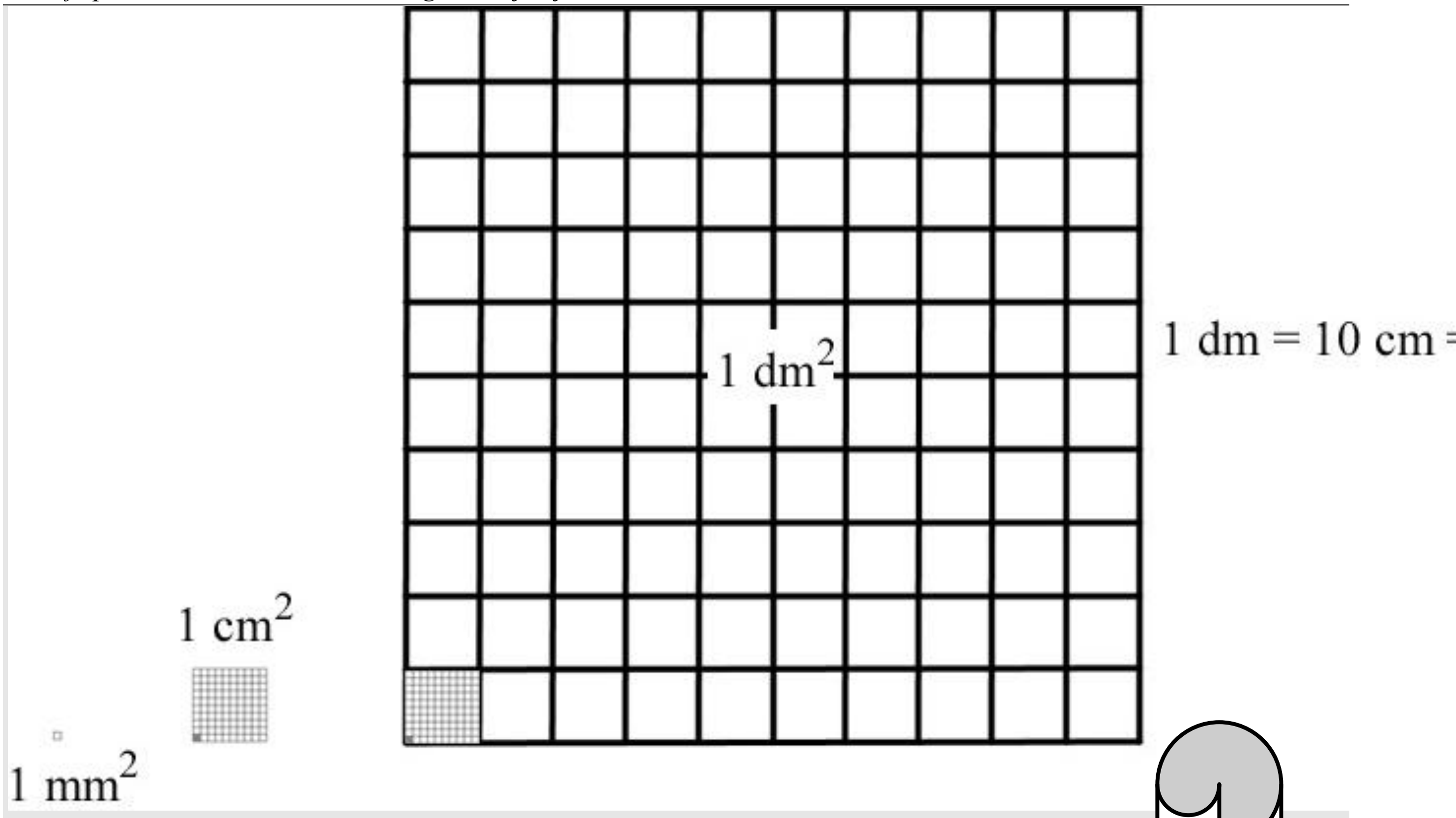
1 centimeter

1 decimeter

12.2. PLOŠČINSKE ENOTE IN PRETVARJANJE

Osnovna merska enota za merjenje ploščin je **kvadratni meter (m^2)**. Za merjenje ploščine uporabljamo tudi druge merske enote: **kvadratni milimeter (mm^2), kvadratni centimeter (cm^2), kvadratni decimeter (dm^2), ar (a), hektar (ha),kvadratni kilometer (km^2).**





ENOTE ZA PLOŠČINO:

- KVADRATNI MILIMETER mm^2 $1\ mm^2$
- KVADRATNI CENTIMETER cm^2 $1\ cm^2 = 100\ mm^2$
- KVADRATNI DECIMETER dm^2 $1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10000\ mm^2$
- KVADRATNI METER m^2 $1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2 = 1000000\ mm^2$
- AR a $1\ a = 100\ m^2 = 10000\ dm^2$
- HEKTAR ha $1\ ha = 100\ a = 10000\ m^2$
- KVADRATNI KILOMETER km^2 $1\ km^2 = 100\ ha = 10000\ a$

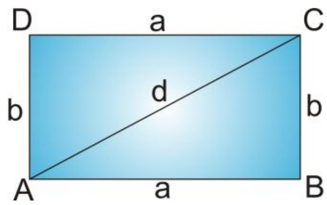
km^2		ha		a		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
							4	1	2				

$4{,}12\ m^2 = 4m^2\ 12\ dm^2 = 412\ dm^2 = 41200 cm^2 = 0{,}0412a$

Podatke lahko vpišemo v tabelo merskih vrednosti. Vsaki merski enoti pripadata dva stolpca, ker je pretvornik med sosednjima enotama 100. Če je treba, v prazne stolpce zapišemo število 0. V tabeli je z
označena decimalna vejica.

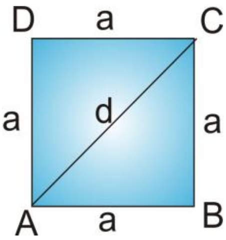
12.3. OBSEGI IN PLOŠČINE LIKOV

Pravokotnik



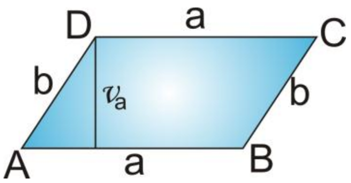
$$o=2(a+b)$$
$$S=a\cdot b$$
$$d=\sqrt{a^2+b^2}$$

Kvadrat



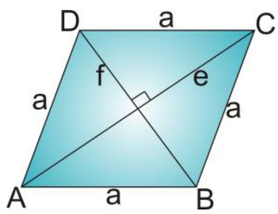
$$o=4a$$
$$S=a^2$$
$$d=a\sqrt{2}$$

Paralelogram



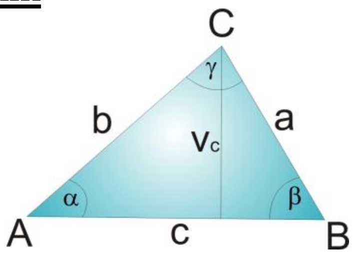
$$o=2(a+b)$$
$$S=a\cdot v_a=b\cdot v_b$$
$$S=a\cdot b\cdot \sin\alpha$$

Romb



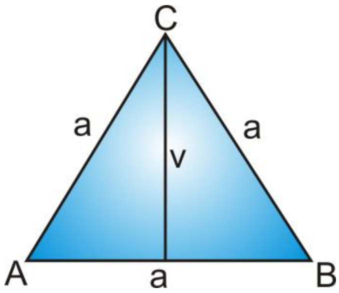
$$o=4a$$
$$S=\frac{e\cdot f}{2}$$

Trikotnik



$$\alpha+\beta+\gamma=180^o$$
$$o=a+b+c$$
$$S=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2}$$
$$S=\frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2}=\frac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{2}=\frac{b\cdot c\cdot \sin\alpha}{2}$$

Enakostranični Trikotnik

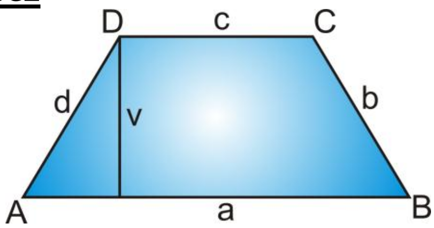


$$o = 3a$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

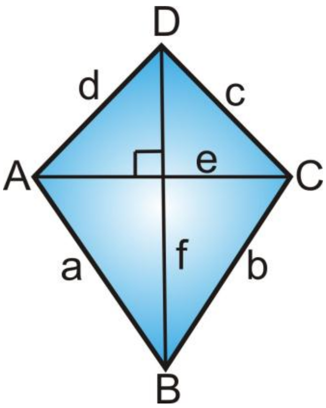
Trapez



$$o = a + b + c + d$$

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

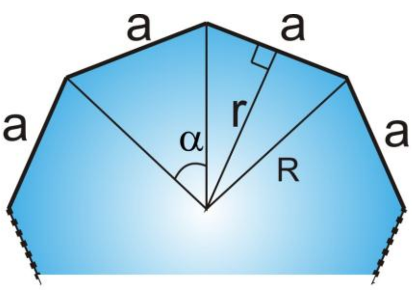
Deltoid



$$o = 2 \cdot (a+b)$$

$$S = \frac{e \cdot f}{2}$$

Pravilni *n*-kotnik



$$\alpha = \frac{360^o}{n}$$

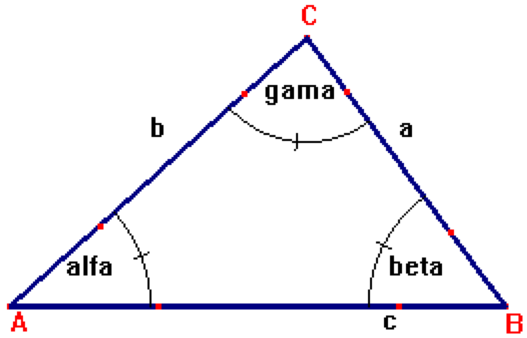
$$o = n \cdot a$$

$$S = \frac{a \cdot n \cdot r}{2}$$

$$S = \frac{n \cdot R^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

12.4. HERONOV OBRAZEC

Heronov obrazec uporabljamo za izračun ploščine trikotnika podanega z vsemi tremi stranicami.

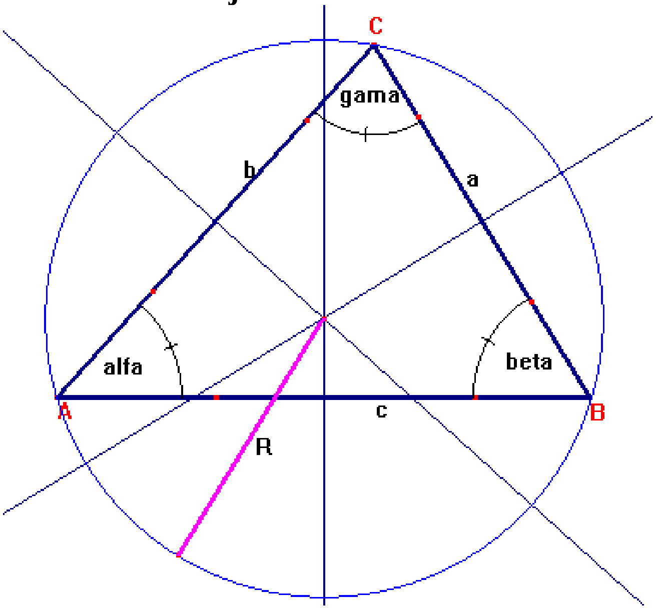


$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

12.5. SINUSNI IZREK

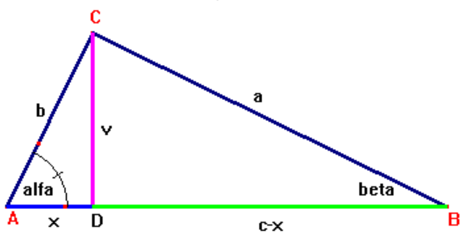
Sinusni izrek velja v vseh trikotnikih!



$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

12.6. KOSINUSNI IZREK

Kosinusni izrek velja v vseh trikotnikih!



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Pitagorov izrek v obeh notranjih pravokotnih trikotnikih ΔADC, ΔDBC:

$$v^2 = b^2 - x^2$$
$$v^2 = a^2 - (c-x)^2$$

Izenačenje v^2 iz prvega trikotnika in v^2 iz drugega trikotnika $v^2 = v^2$:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

Upoštevamo $x = b\cos\alpha$ in izrazimo a^2:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

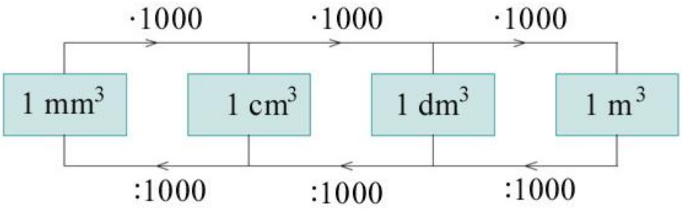
13. IZREKI V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU

14. GEOMETRIJSKA TELESA

Geometrijsko telo je od vseh strani omejen prostor. Telo, omejeno samo z ravnimi ploskvami, je ***OGLATO GEOMETRIJSKO TELO***. Če telo omejuje vsaj ena kriva ploskev, je telo ***OKROGLO***.
ROB je daljica, na kateri se stikata dve mejni ploskvi telesa oziroma daljica, ki povezuje dve sosednji oglišči.
OGLIŠČE je točka v kateri se stikajo vsaj trije robovi.
POVRŠINA telesa je vsota ploščin vseh mejnih ploskev. Označimo jo s P. Merimo jo s ploščinskimi enotami (m^2, dm^2, cm^2, mm^2).
PROSTORNINA ali VOLUMEN telesa je velikost prostora, ki ga telo zavzema. Označimo ga z V. Merimo jo s prostorninskimi enotami (m^3, dm^3, cm^3, mm^3, $1dm^3 = 1l$)
MREŽO telesa dobimo, če vse mejne ploskve razgrnemo v ravnino. Obstaja več načinov razporeditve ploskev v mreži.

14.1. PROSTORNINSKE ENOTE IN PRETVARJANJE

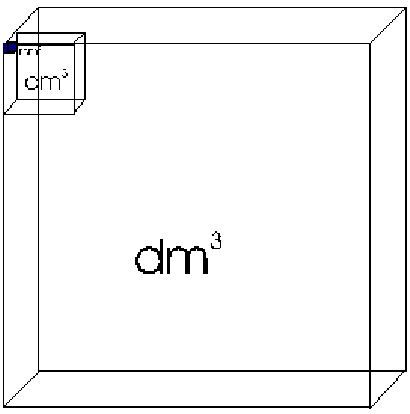
Osnovna merska enota za merjenje prostornin je **kubični meter (m^3)**. Za merjenje prostornine uporabljamo tudi druge merske enote: **kubični milimeter (mm^3), kubični centimeter (cm^3), kubični decimeter (dm^3).**

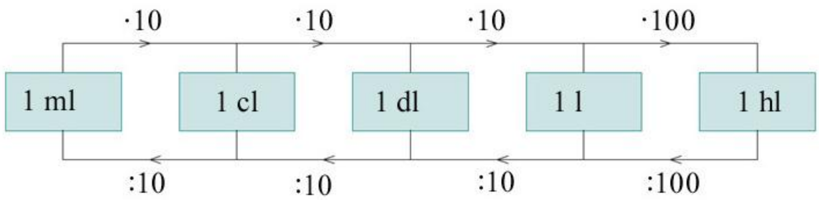


m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
		4	**0**	**1**	**2**						

$4{,}012\ m^3 = 4m^3\ 12dm^3 = 4\ 012dm^3$

Podatke lahko vpišemo v tabelo merskih vrednosti. Vsaki merski enoti pripadajo trije stolpci, ker je pretvornik med sosednjima enotama 1000. Če je treba, v prazne stolpce zapišemo število 0. V tabeli je z označena decimalna vejica.



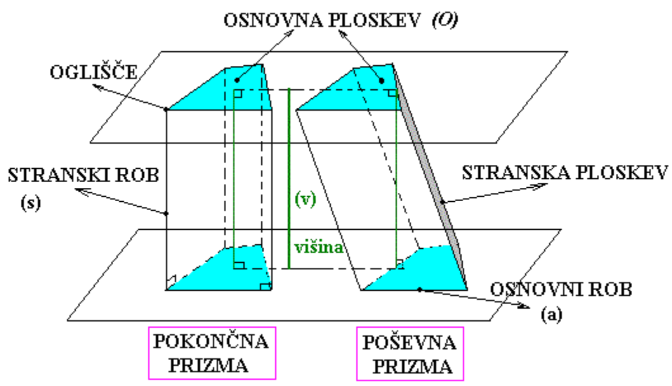


$1\ dm^3 = 1\ l$ $\quad$ $1\ cm^3 = 1\ ml$

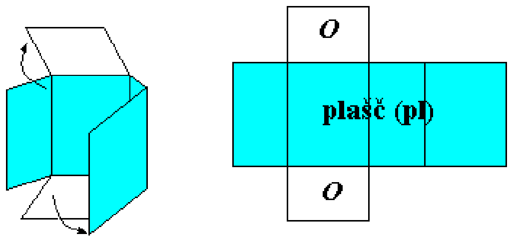
Za merjenje prostornin pa uporabljamo tudi votle mere. Osnovna merska enota za merjenje prostornin v votlih merah je **liter (l)**, ki je enak enemu kubičnemu decimetru. Ostale enote so še: **hektoliter (hl)**, **deciliter (dl)**, **centiliter (cl)**, **mililiter (ml)**. Pretvornik med njimi je 10.

14.2. PRIZME

PRIZMA je oglato telo, ki ga omejujeta vzporedna ***skladna n-kotnika*** in ***n paralelogramov***.
Ločimo **pokončne in poševne** prizme. Prizma je pokončna, če je stranski rob na osnovnih ploskvah pravokoten na osnovno ploskev. Prizma je poševna, če stranski rob ni pravokoten na osnovno ploskev.
Prizma je ***pravilna***, če je osnovna ploskev pravilni n-kotnik (na primer enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilen 5-kotnik). Če ima prizma vse robove enako dolge, je ***enakoroba*** (kocka je štiristrana enakorobna prizma).

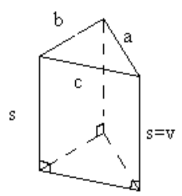


Osnovni ploskvi **O** prizme sta skladna n-kotnika, ki ležita na vzporednih ravninah.
Osnovni rob **a** je stranica n-kotnika, ki predstavlja osnovno ploskev prizme.
Stranska ploskev je paralelogram oziroma pravokotnik pri pokončni prizmi.
Plašč prizme **pl** sestavlja n paralelogramov oziroma pravokotnikov.
Višina **v** prizme je razdalja med vzporednima ravninama osnovnih ploskev.
Stranski rob **s** je rob, kjer se stikata dve stranski ploskvi. Vsi stranski robovi prizem so skladni in enaki višini.

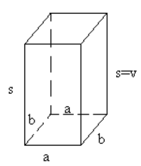


Površina: $P = 2 \cdot O + pl$ Plašč: $pl = o \cdot v$ Volumen: $V = O \cdot v$

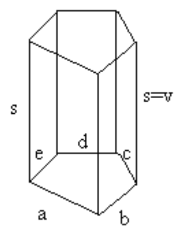
Glede na število osnovnih robov osnovne ploskve ločimo prizme na tristrane, štiristrane in večstrane (petsrane, šeststrane,...).



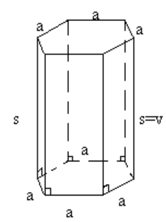
TRISTRANA



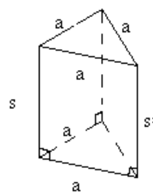
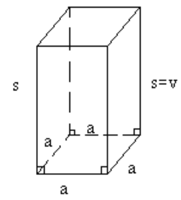
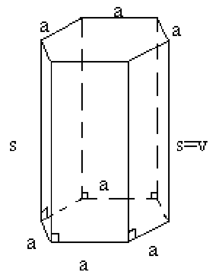
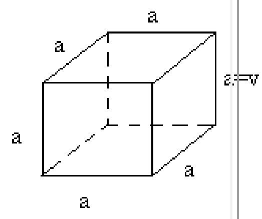
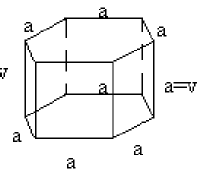
ŠTIRISTRANA



PETSTRANA

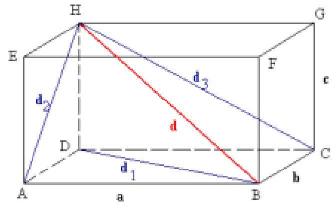


ŠESTSTRANA

Pravilna tristrana prizma	**Pravilna štiristrana prizma**	**Pravilna šeststrana prizma**	**Enakoroba štiristrana prizma**	**Enakoroba šeststrana prizma**
				
Osnovna ploskev je **enakostranični trikotnik.**	Osnovna ploskev je **kvadrat.**	Osnovna ploskev je **pravilni šestkotnik.**		

4.2.1..KVADER

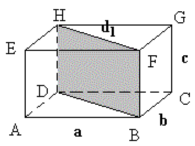
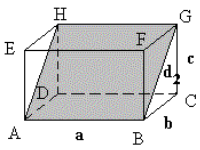
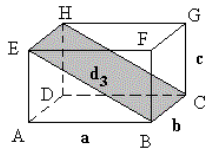
Kvader je oglato geometrijsko telo, ki ga omejuje ***šest mejnih ploskev***. Po dve in dve mejni ploskvi sta skladna in vzporedna pravokotnika. Kvader ima ***12 robov*** in ***8 oglišč***. ***Dve*** ploskvi sta ***osnovni ploskvi*** (ploskev na kateri kvader stoji in njej vzporedna ploskev), druge štiri pa tvorijo plašč kvadra (oznaka pl). Kvader ima tri skupine s po 4 skladnimi in vzporednimi robovi. Zato kvader določajo trije značilni robovi: ***dolžina, širina in višina.*** Navadno jih označimo po vrsti z a, b in c.
Ploskovna diagonala je daljica, ki povezuje dve nasprotni oglišči iste ploskve, na primer AC, BG, CF, označujemo jo z d1.
Telesna diagonala je daljica, ki povezuje dve oglišči različnih ploskev, na primer AC, BH, DF, označimo jo z d in so med seboj skladne.



$d_1 = a^2 + b^2$ $\quad d_2 = b^2 + c^2$ $\quad d_3 = a^2 + c^2$ $\quad d = a^2 + b^2 + c^2$

Diagonalni presek kvadra je presek kvadra z ravnino, ki gre skozi nesosednja robova. Kvader ima tri različno velike diagonalne preseke.

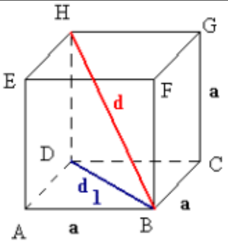
$p = cd_1$ $\quad p = ad_2$ $\quad p = bd_3$

Površina: $P = 2 \cdot (ab + bc + ac)$ Volumen: $V = abc$

4.2.2. KOCKA

Kocka je oglato geometrijsko telo, ki ga omejuje ***šest skladnih mejnih ploskev***, ki imajo obliko kvadrata. Kocka ima ***12 robov*** in ***8 oglišč***. Dve izbrani ploskvi (ploskev na kateri kocka stoji in njej vzporedna ploskev) sta osnovni, druge štiri pa tvorijo plašč kocke (oznaka pl). Kocka je enakorobni kvader.
Ploskovna diagonala je daljica, ki povezuje dve nasprotni oglišči iste ploskve, na primer AC, BG, CF, označujemo jo z d_1 in so medseboj skladne.



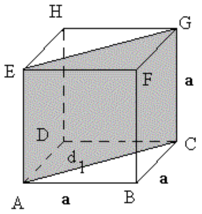
$d_1 = a\sqrt{2}$

Telesna diagonala je daljica, ki povezuje dve oglišči različnih ploskev, na primer AC, BH, DF, označimo jo z d in so med seboj skladne.

$d_1 = a\sqrt{3}$

Diagonalni presek kocke je presek kvadra z ravnino, ki gre skozi nesosednja robova. Označimo jo z D. Diagonalni preseki kocke so skladni.

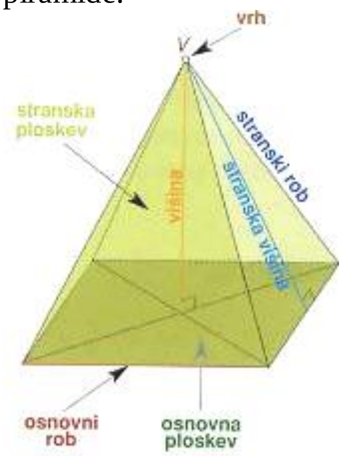
$p = ad_1$



Površina: $P = 6a^2$ Volumen: $V = a^3$

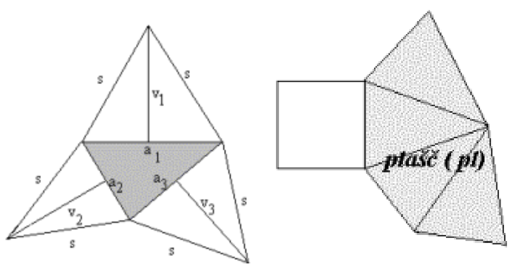
14.3. PIRAMIDE

Piramida je oglato telo, ki ga omejujejo ***n-kotnik*** in ***n trikotnikov*** s ***skupno točko V***. Točka V je ***vrh*** piramide.



Osnovna ploskev **O** je n-kotnik.
Osnovni rib **a** je stranica n-kotnika, ki predstavlja osnovno ploskev.
Vrh **V** leži natanko nad središčem osnovne ploskve.
Višina **v** je pravokotna razdalja med vrhom in ravnino osnovne ploskve.
Stranska ploskev je trikotnik.
Stranski rob **s** je tista stranica stranske ploskve, ki povezuje oglišča osnovne ploskve z vrhom piramide.
Stranska višina $\mathbf{v_1}$ je višina stranske ploskve, trikotnika v plašču **pl**.
Plašč piramide sestavlja n stranskih ploskev, ki so trikotni.

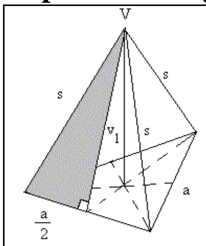
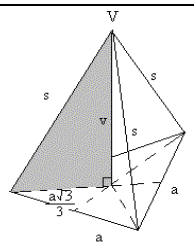
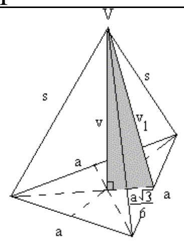
Če so vsi stranski robovi med seboj enaki in če pade višina v središče njene osnovne ploskve, je piramida pokončna (stranske ploskve so enakokraki trikotniki) , sicer je poševna. Če je osnovna ploskev piramide pravilni n-kotnik, je piramida ***pravilna*** (vse stranske ploskve so skladni enakokraki trikotniki).



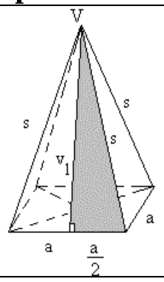
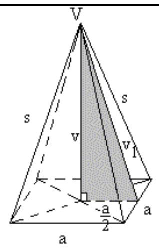
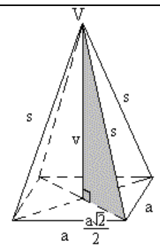
Površina: $P = O + pl$ Plašč: $pl = n \cdot \dfrac{av_1}{2}$ Volumen: $V = \dfrac{O \cdot v}{3}$

Po številu robov osnovne ploskve ločimo tristrane, štiristrane, ..., n-strane piramide.
Piramido, ki ima za osnovno ploskev trikotnik, imenujemo tristrana piramida ali četverec ali tetraeder. Če je četverec enakorob, ga imenujemo pravilni četverec ali pravilni tetraeder.

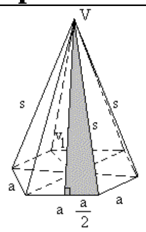
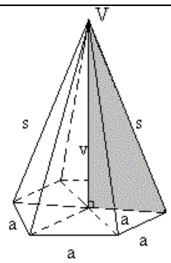
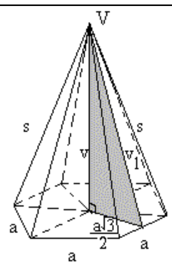
Uporaba Pitagorovega izreka v pravilni 3-strani piramidi: Značilni pravokotni trikotniki:

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$s^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + v_1^2$</td><td>$s^2 = v^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$</td><td>$v_1^2 = v^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$</td></tr>
</table>

Uporaba Pitagorovega izreka v pravilni 4-strani piramidi

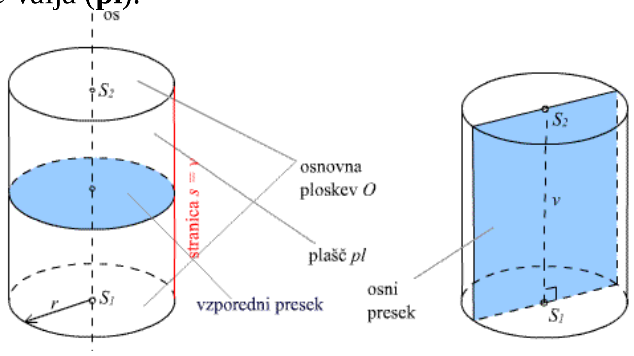
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$s^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + v_1^2$</td><td>$v_1^2 = v^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$</td><td>$s^2 = v^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$</td></tr>
</table>

Uporaba Pitagorovega izreka v pravilni 6-strani piramidi

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$s^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + v_1^2$</td><td>$s^2 = a^2 + v^2$</td><td>$v_1^2 = v^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$</td></tr>
</table>

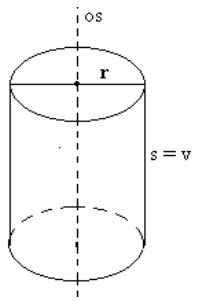
14.4. VALJ

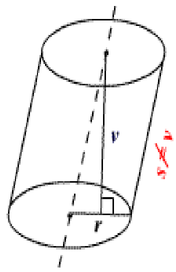
Valj je telo, omejeno z dvema skladnima in vzporednima krogoma in eno krivo ploskvijo.
Kroga s središčema S_1 in S_2 imenujemo **osnovni ploskvi valja (O).**
Krivo ploskev imenujemo ***plašč*** valja (**pl**).

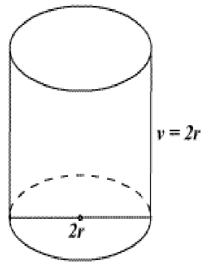


Višina valja **v** je razdalja med osnovnima ploskvama.
Stranski rob valja ***s*** je daljica na plašču valja, ki je vzporedna z osjo in povezuje krajišči osnovnih ploskev.
Os valja je premica skozi središči osnovnih ploskev (S_1,S_2).
Če valj presekamo z ravnino, ki je vzporedna osnovni ploskvi, dobimo vzporedni presek valja. Presečni lik tega preseka je krog.
Če valj presekamo z ravnino, ki gre skozi njegovo os, dobimo osni presek valja. Presečni lik osnega preseka je pri pokončnem valju pravokotnik, pri enakostraničnem pa kvadrat.

Poznamo različne oblike:





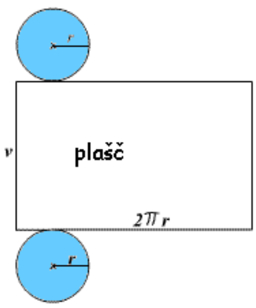


POKONČEN dolžina stranice je enaka dolžini višine *s* = *v*. Osni presek je ***pravokotnik***.

POŠEVEN dolžina stranice ni enaka dolžini višine. Osni presek je ***paralelogram***.

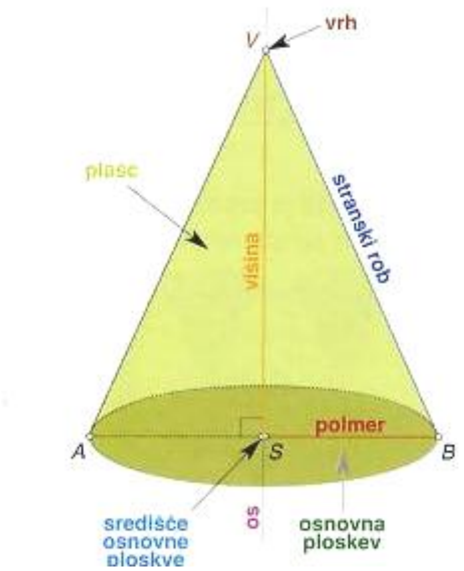
ENAKOSTRANIČEN višina je enaka premeru osnovne ploskve: *v* = *2r*. Osni presek je ***kvadrat.***

Mrežo valja sestavljajo ***plašč*** in ***dve osnovni ploskvi.***
Če plašč pokončnega valja razgrnemo v ravnino, dobimo *pravokotnik*.
Dolžina osnovnice tega pravokotnika je enaka obsegu osnovne ploskve $o = 2\pi r$, druga stranica pa je enaka višini valja *v*. Ploščina plašča je tako: $pl = 2\pi rv$.

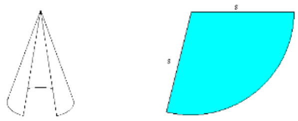


Površina: $P = 2 \cdot O + pl$ Volumen: $V = O \cdot v$ Plašč: $pl = 2\pi rv$ Osnovna ploskev: $O = \pi r^2$

14.5. STOŽEC



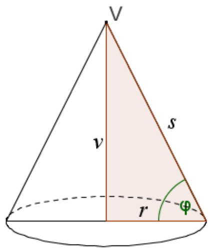
Osnovna ploskev **O** stožca je krog.
Polmer stožca **r** je polmer osnovne ploskve.
Središče osnovne ploskve **S**.
Vrh **V** leži natanko nad središčem osnovne ploskve.
Os je premica, ki poteka skozi vrh stožca in središče osnovne ploskve.
Plašč **pl** stožca je krožni izsek.



Stranski rob **s** je daljica, ki povezuje vrh stožca in poljubno točko na krožnici.
Višina **v** je razdalja med vrhom in osnovno ploskvijo.
Osni presek ΔAVB stožca je enakokraki trikotnik ali enakostranični trikotnik, če je stožec enakostraničen.
ΔAVB pa je pravokotni trikotnik.

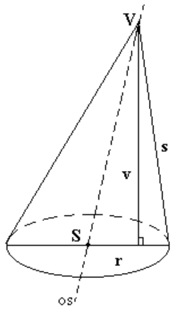
Stožec je pokončen, če je njegova os pravokotna na ravnino osnovne ploskve, sicer je poševen. Stranice pokončnega stožca imajo enake dolžine, medtem ko imajo stranice poševnega stožca različne dolžine.

Pokončni stožec



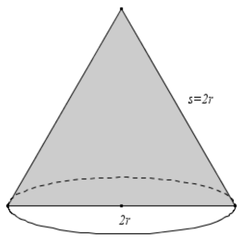
Osni presek je enakokraki trikotnik.

Poševni stožec



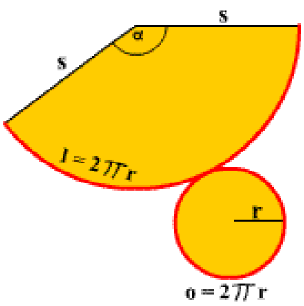
Osni presek je raznostranični trikotnik.

Enakostranični stožec



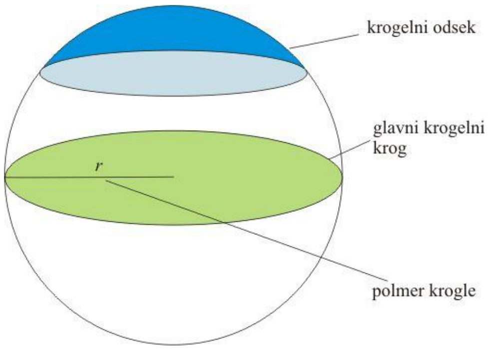
Osni presek je enakostranični trikotnik.

Mrežo pokončnega stožca sestavljata osnovna ploskev in plašč. Če razvijemo plašč pokončnega stožca v ravnino, dobimo krožni izsek. Njegov polmer je enak stranici s, njegov lok l pa obsegu osnovne ploskve.



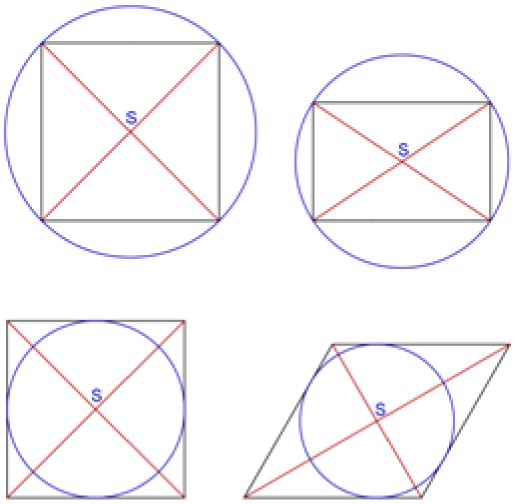
Površina: $P = O + pl$ Volumen: $V = \dfrac{O \cdot v}{3}$ Osnovna ploskev: **O=π·r²** Plašč: **pl=πrs**

14.6. KROGLA

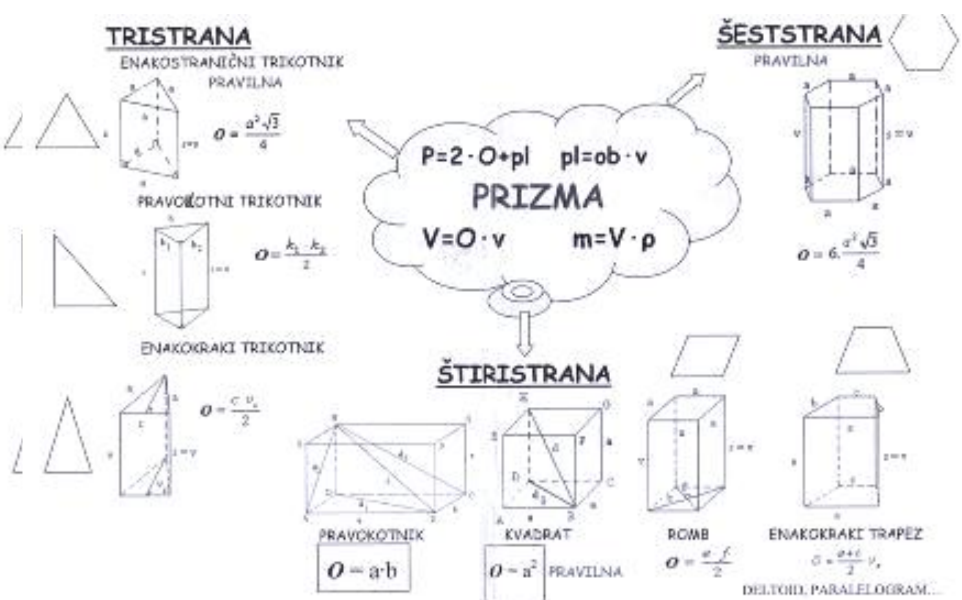


Sfera ali obla je kriva ploskev, ki obdaja kroglo. Središče krogle **S** je točka, od katere je vsaka točka sfere enako oddaljena od središča.
Polmer krogle **r** je razdalja med središčem krogle in poljubno točko sfere.

Površina: $P = 4\pi r^2$ Volumen: $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$



S
S
S
S



TRISTRANA
ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK
PRAVILNA
O = a²√3 / 4
PRAVOKOTNI TRIKOTNIK
O = k₁ · k₂ / 2
ENAKOKRAKI TRIKOTNIK
O = c · v_c / 2
P=2·O+pl
pl=ob·v
PRIZMA
V=O·v
m=V·ρ
ŠESTSTRANA
PRAVILNA
O = 6 · a²√3 / 4
ŠTIRISTRANA
PRAVOKOTNIK
O = a·b
KVADRAT
O = a²
PRAVILNA
ROMB
O = e · f / 2
ENAKOKRAKI TRAPEZ
O = (a+c)/2 v
DELTOID, PARALELOGRAM...