

GEOMETRIJA V PROSTORU

PLOŠČINE IN OBSEGI LIKOV

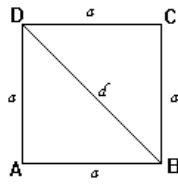
(A) Ploščine in obsegi likov

Kvadrat

$$ob = 4a$$

$$S = a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

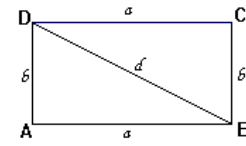


Pravokotnik

$$ob = 2a + 2b$$

$$S = a \cdot b$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

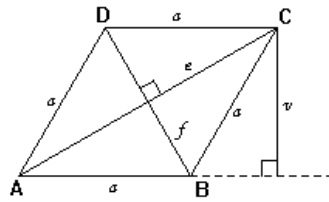


Romb

$$ob = 4a$$

$$S = a \cdot v$$

$$S = \frac{e \cdot f}{2}$$

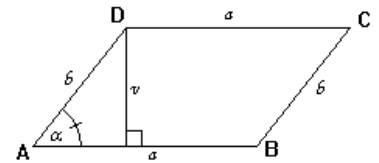


Paralelogram

$$ob = 2a + 2b$$

$$S = a \cdot v_a$$

$$S = ab \sin \alpha$$



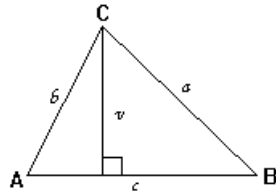
Trikotnik

$$ob = a + b + c$$

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

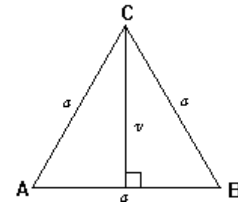


Enakostranični trikotnik

$$ob = 3a$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

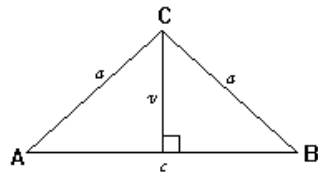
$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Enakokraki trikotnik

$$ob = 2a + c$$

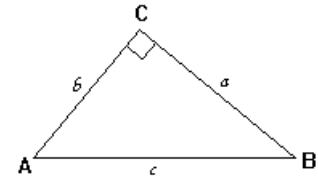
$$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$$



Pravokotni trikotnik

$$ob = a + b + c$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

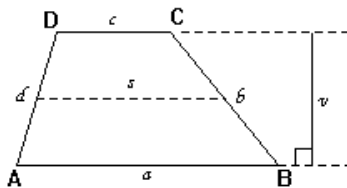


Trapez

$$ob = a + b + c + d$$

$$S = s \cdot v$$

$$s = \frac{a+c}{2}$$

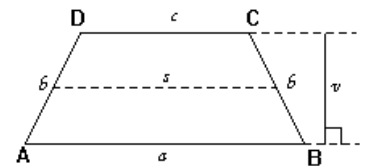


Enakokraki trapez

$$ob = a + 2b + c$$

$$S = s \cdot v$$

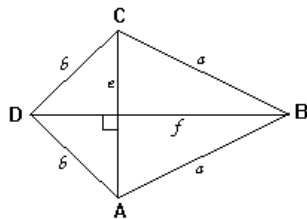
$$s = \frac{a+c}{2}$$



Deltoid

$$ob = 2a + 2b$$

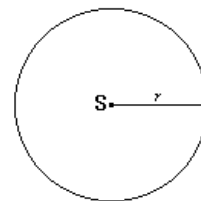
$$S = \frac{e \cdot f}{2}$$



Krog

$$ob = 2 \cdot \pi \cdot r$$

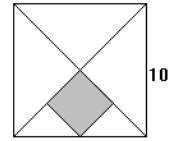
$$S = \pi \cdot r^2$$



(B) Vaje

1. Obseg pravokotnika meri 136 cm, dolžini stranic se razlikujeta za 28 cm. Izračunaj ploščino in diagonalo pravokotnika. [R: stranici: 20 in 48 cm, $d = 52$ cm, $S = 960$ cm²]

2. Kolikšna je ploščina osenčenega kvadrata na sliki, če stranica velikega kvadrata meri 10 cm? [R: 12,5 cm²]



3. Romb $ABCD$ za daljšo diagonalo $e = 56$ cm in pravokotnik $EFGH$ imata enak obseg. Stranici pravokotnika sta v razmerju $a : b = 4 : 3$, njegova diagonala $d = 50$ cm. Kateri lik ima večjo ploščino? [R: pravokotnik, $S_p = 1200$ cm², $S_r = 1176$ cm²]

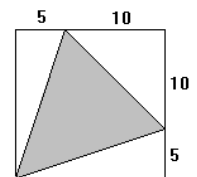
4. Razmerje dveh stranic paralelograma je $a : b = 2 : 1$. Višina na stranico a meri 10 cm, ploščina pa 400 cm². Koliko merita stranici in koliko višina na stranico b ? [R: $a = 40$ cm, $b = 20$ cm, $v_b = 20$ cm]

5. Enakostranični trikotnik in kvadrat imata enak obseg 36 cm. Kateri lik ima večjo ploščino in za koliko? [R: kvadrat, $S_k = 81$ cm², $S_t = 36\sqrt{3}$ cm²]

6. Izračunaj ploščino trikotnika s stranicami 8 cm, 29 cm in 35 cm. V danem trikotniku na minuto natančno izračunaj velikost najmanjšega in največjega kota. [R: $S = 84$ cm², 133,6°, 9,53°]

7. Izračunaj ploščino trikotnika, pri katerem sta znani dve stranici $b = 15$ cm, $c = 20$ cm, in višina na tretjo od stranic $v_a = 12$ cm. [R: $a = 25$ cm, $S = 150$ cm²]

8. Izračunaj ploščino osenčenega lika, ki je vrisan v kvadratu s stranico 15 cm. [R: 100 cm²]



9. Izračunaj ploščino trapeza, pri katerem je $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $\beta = 60^\circ$.

$$[R: v = 2\sqrt{3} \text{ cm}, S = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2]$$

10. V enakokrakem trapezu: $a = 20$ cm, $c = 14$ cm podaljšamo kraka do presečišča E . Koliko meri krak, če je dolžina daljice $|AE| = 10$ cm? [R: $b = 3$ cm]

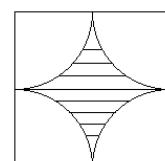
11. Izračunaj ploščino deltoida z danimi podatki: $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $\alpha = 150^\circ$. [R: $24\sqrt{3}$ cm²]

12. Ploščina deltoida znaša 1800 cm². Koliko merita diagonalni, če je diagonala f štirikrat daljša od diagonale e ? [R: $e = 30$ cm, $f = 120$ cm]

13. Kolikšna je ploščina pravilnega 12 – kotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 16 cm? [R: $S = 768$ cm²]

14. Izračunaj stranico pravilnega 8 – kotnika, ki včrtan oz. očrtan krogu s polmerom 12 cm. [R: $a_v = 9,18$ cm, $a_o = 9,94$ cm]

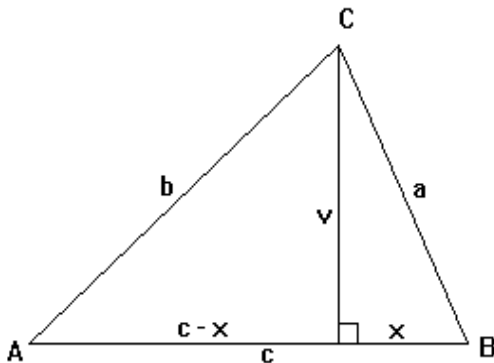
15. Izračunaj ploščino in obseg osenčenega lika na sliki, če stranica kvadrata meri 14 cm. [R: 42,06 cm²]



RAVNINSKA TRIGONOMETRIJA

(A) Kosinusni izrek in Pitagorov izrek

V poljubnem trikotniku ABC narišimo višino, ki osnovnico razdeli na odseka dolžine x in $c - x$. Iz nastalih dveh pravokotnikov izrazimo višino s Pitagorovim izrekom.



$$v^2 = a^2 - x^2$$

$$v^2 = b^2 - (c - x)^2$$

Izenačimo desni strani enačbe in dobimo:

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

Preuredimo enakost tako, da izrazimo b^2 , in odsek x nadomestimo z $a \cos \beta$. Dobimo eno od enakosti:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Drugi dve sta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Kosinusni izrek uporabljamo, če v trikotniku poznamo:

- dve stranici in kot med njima (izračunamo tretjo stranico)
- vse tri stranice (izračunamo notranje kote trikotnika):

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Pitagorov izrek je poseben primer kosinusnega izreka. Velja namreč v pravokotnem trikotniku, kjer je kot γ enak 90° in zato $\cos \gamma = 0$.

Kvadrat hipotenuze je enak vsoti kvadratov katet: $c^2 = a^2 + b^2$.

(B) Sinusni izrek

Razmerje med stranico trikotnika in sinusom nasprotnega kota je enako premeru trikotniku očrtanega kroga:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

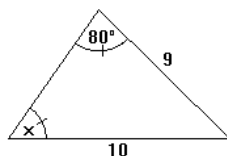
Sinusni izrek uporabljamo, če v trikotniku poznamo:

- stranico in dva notranja kota
- dve stranici in kot, ki leži eni od obeh stranic nasproti:
 - kot leži nasproti daljši stranici \rightarrow ena rešitev
 - kot leži nasproti krajši stranici \rightarrow možni dve rešitvi
- polmer očrtanega kroga in dve stranici
- polmer očrtanega kroga in dva kota
- polmer očrtanega kroga, ena stranica in en kot, ki ne leži tej stranici nasproti

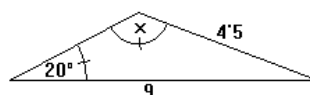
(C) Vaje

1. Izračunaj kot oziroma stranico x , če so vpisane mere v centimetrih:

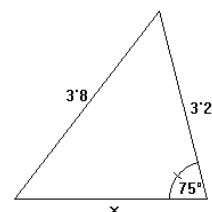
a.



b.



c.

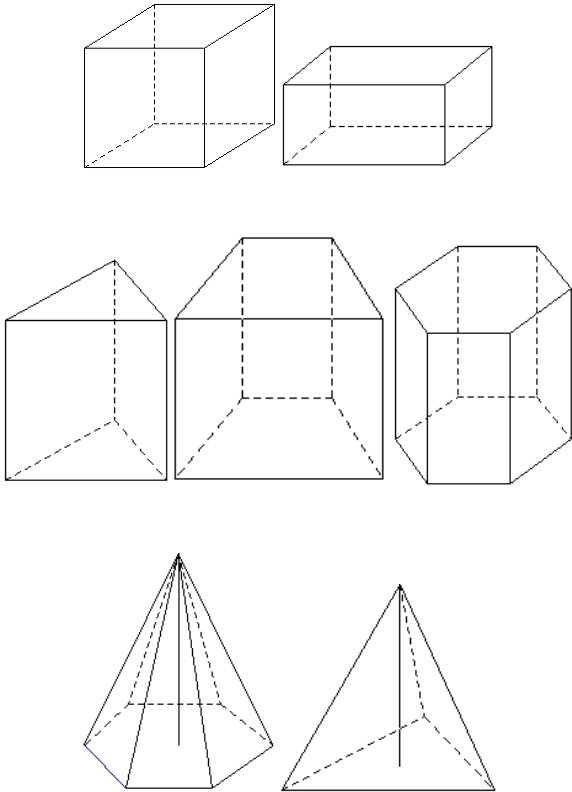
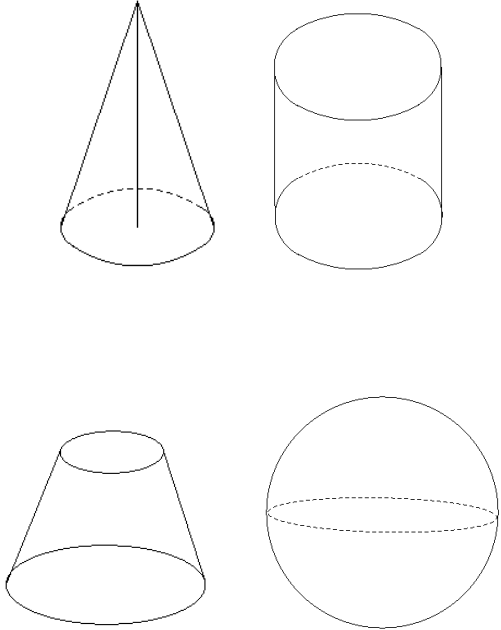
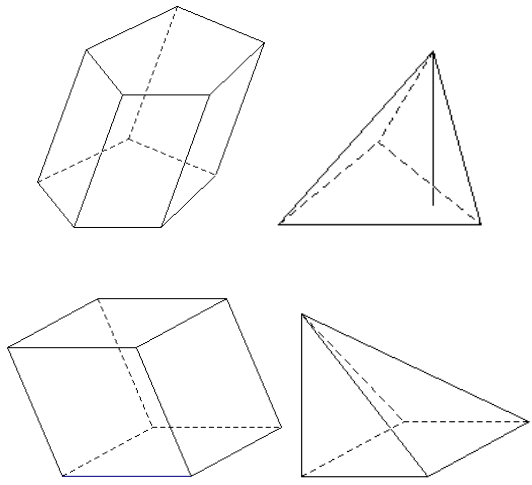
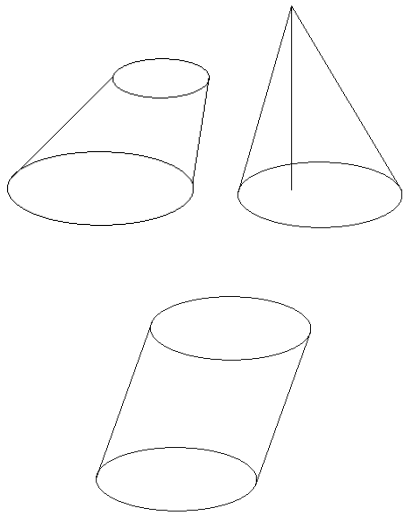


[R: $43, 16^\circ, 50, 57^\circ, 3, 04$ cm]

2. Dan je trikotnik ABC : $a = 9$ cm, $b = 7$ cm in kot $\gamma = 56^\circ$. Izračunaj dolžino stranice c . [R: 7,72 cm]
3. Izračunaj kote trikotnika s stranicami 5 cm, 6 cm in 7 cm. [R: $78,46^\circ$, $57,12^\circ$, $44,42^\circ$]
4. V trapezu sta osnovnici $a = 1$ dm in $c = 4$ cm ter kraka $b = 7$ cm in $d = 5$ cm. Izračunaj kote. [R: $\alpha = 78,46^\circ$, $\beta = 44,42^\circ$, $\gamma = 135,58^\circ$, $\delta = 101,54^\circ$]
5. Izračunaj dolžini diagonal paralelograma $ABCD$, če stranica AB meri 7 cm, stranica AD pa 10 cm in je kot $\alpha = 65^\circ 42'$. [R: $e = 14,37$ cm, $f = 9,56$ cm]
6. Paralelogram $ABCD$ ima dolžine stranic 8 cm in 6 cm, dolžina diagonale f je 7 cm. Kolikšni so notranji koti paralelograma? [R: $\alpha = \gamma = 57,91^\circ$, $\beta = \delta = 122,09^\circ$]
7. V deltoиду $ABCD$ meri $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 7$ cm, kot $\angle ABC = 124^\circ$. Izračunaj dolžino diagonale AC . [R: 9,81 cm]
8. V enakokrakem trikotniku meri krak 20 cm, kot ob vrhu pa 147° . Izračunaj dolžino osnovnice AB . [R: 38,35 cm]
9. V trikotniku ABC je polmer očrtanega kroga $R = 12$ cm, $a = 12\sqrt{3}$ cm in $v_c = 6$ cm.
 a. Izračunaj kot α . [R: 60°]
 b. Natančno izračunaj dolžino stranice b . [R: $4\sqrt{3}$ cm]
10. V trikotniku ABC je kot $\gamma = 60^\circ$, $t_a = 6$ cm in $a = 8$ cm.
 a. Izračunaj dolžini stranic b in c na eno decimalno mesto natančno. [R: $b = 6,9$ cm, $c = 7,5$ cm]
 b. Izračunaj kot β . [R: $52,75^\circ$]
11. Ploščina romba je 200 cm², $\alpha = 30^\circ$. Izračunaj dolžini diagonal romba na dve decimalni mesti natančno. [R: $a = 20$ cm, $e = 38,64$ cm, $f = 10,35$ cm]
12. V paralelogramu $ABCD$ je $\angle CAB = 30^\circ 15'$, $AC = e = 15$ cm in $b = 10$ cm. Izračunaj kota α in β . [R: $\alpha = 130,92^\circ$, $\beta = 49,08^\circ$]
13. V trapezu $ABCD$ je $\angle BDC = 15^\circ$, $c = 4$ cm, $b = 6$ cm in $a = 15$ cm.
 a. Izračunaj dolžino diagonale f . [R: $f = 9,77$ cm]
 b. Izračunaj dolžino stranice d . [R: $d = 6,11$ cm]
14. V enakokrakem trapezu s podatki $a = 11$ cm, $c = 3$ cm in $b = 4\sqrt{2}$ cm izračunaj:
 a. kota α in γ [R: $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 135^\circ$]
 b. ploščino [R: $v = 4$ cm, $S = 28$ cm²]
 c. dolžino diagonal [R: $e = f = 8,06$ cm]
15. V trapezu je dano: $c = 4$ cm, $a = 1$ dm, $d = 8$ cm in $\beta = 63^\circ 20'$.
 a. Izračunaj dolžino stranice b . [R: 8,63 cm]
 b. Izračunaj kot α . [R: $75,58^\circ$]
16. Dan je paralelogram $ABCD$ s stranicama $a = 8$ cm, $b = 6$ cm in vmesnim kotom $\alpha = 45^\circ$.
 a. Nariši skico in natančno izračunaj višino na stranico a . [R: $3\sqrt{2}$ cm]
 b. Izračunaj dolžini obeh diagonal. [R: $e = 12,96$ cm, $f = 5,67$ cm]
 c. Natančno izračunaj ploščino trikotnika, ki ga omejujeta diagonali in osnovnica a . [R: $6\sqrt{2}$ cm²]

GEOMETRIJSKA TELESA

(A) Delitev geometrijskih teles

		OGLATA GEOMETRIJSKA TELESA	OKROGLA GEOMETRIJSKA TELESA
POKONČNA			
		Vsa telesa so omejena z ravnimi ploskvami.	Vsaj ena ploskev je kriva.
POŠEVNA			

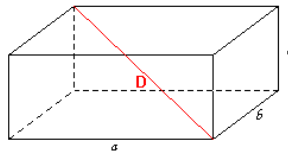
(C) Vaje - prizma

Kvader je pokončna štiristrana prizma, katerega osnovna ploskev je pravokotnik.

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$P = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

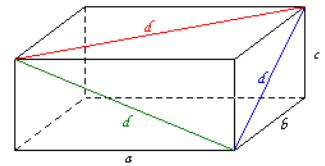
$$V = a \cdot b \cdot c$$



$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$



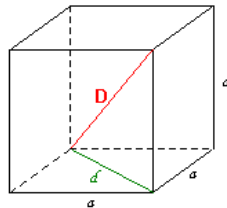
Kocka je enakorobni kvader.

$$d = a\sqrt{2}$$

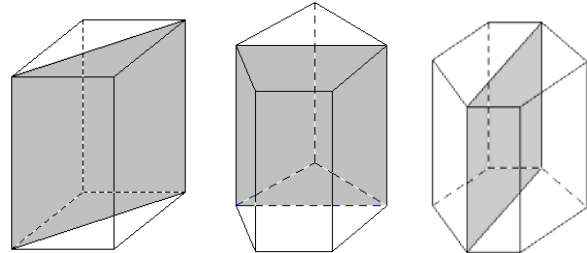
$$D = a\sqrt{3}$$

$$P = 6a^2$$

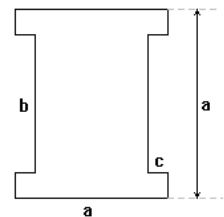
$$V = a^3$$



Značilni diagonalni **osni presek** prizme

4 – strana prizma

1. Pločevinasta posoda brez pokrova ima obliko pravilne štiristrane prizme z osnovnim robom $a = 12$ cm in višino $v = 20$ cm. Koliko pločevine vsebuje, če so robovi zavarjeni med seboj? [R: 1104 cm²]
2. Kolikšna je prostornina deske z dolžino 4 m, širino 26 cm in debelino 2,5 cm? Koliko stane deska, če je cena 162 €/m³? [R: 26 dm³, 4,21 €]
3. Koliko tehta 25 mm debela železna plošča dolžine 2 m in širine 3 dm, če je gostota železa 7,8 kg/dm³? [R: 117 kg]
4. Pločevinasta posoda v obliki kocke drži 216 litrov. Koliko pločevine potrebujemo za to posodo brez pokrova? Kako dolga je najdaljša tanka palica, ki jo lahko vstavimo v posodo? [R: 180 dm², 6√3 dm]
5. Skladišče ima obliko kvadra: dolžina 8 m, širina 5 m, višina 3 m. Kolikšna je njegova prostornina? Koliko stane beljenje skladišča, če računamo 3,5 €/m²? Belimo le stene in strop. [R: 120 m³, 413 €]
6. 6 m visok betonski steber (gostota $\rho = 2,5$ kg/dm³) ima obliko pokončne kvadratne prizme z osnovnim robom 4 dm. Koliko tehta steber? Koliko stane površinska obdelava plašča, če računamo 15 €/m²? [R: 2,4 t, 72 €]
7. Do katere višine smemo napolniti z živim srebrom posodo v obliki kvadra, katerega osnovna ploskev je pravokotnik s stranicama 3 dm in 5 dm, če vzdrži dno 4000 N in je gostota živega srebra 13,6 g/cm³? [R: 1,96 dm]
8. Kolikšen kot oklepa telesna diagonalna kocke z eno mejno ploskvijo? [R: 35,26°]
9. Kako dolga bi morala biti železna traverza, da bi tehtala 100 kg, če je gostota železa $\rho = 7,8$ g/cm³ in je pravokotni presek traverze po sliki: $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 3$ cm? [R: 24,65 dm]

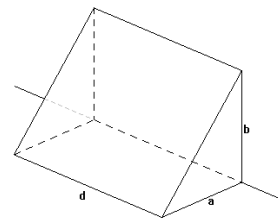


10. 8 delavcev gradi 120 m dolg nasip, katerega prečni presek je enakokraki trapez: $a = 9$ m, $c = 5$ m, $v = 1,6$ m. V kolikih dneh bodo dogradili nasip, če je norma enega delavca 3 m³/dan? [R: 56 dni]
11. Izračunaj telesno diagonalno in najdaljšo ploskovno diagonalno kvadra z robovi: 340 cm, 2,43 m in 8 dm. [R: 425,5 cm, 417,91 cm]

12. V kvadru s prostornino $V = 5103 \text{ cm}^3$ je razmerje robov $a : b : c = 3 : 7 : 9$. Izračunaj površino. [R: 1998 cm^2]
13. Izračunaj površino kocke, če meri ploščina njenega diagonalnega preseka $144\sqrt{2} \text{ cm}^2$. [R: 864 cm^2]

3 – strana prizma

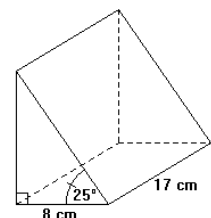
14. Kovinasto pravilno tristrano prizmo je treba posrebiti (galvanizacija). Koliko srebra potrebujemo, če porabimo $0,1 \text{ g}$ na cm^2 in ima prizma osnovni rob $a = 6 \text{ cm}$ ter je 1 dm visoka? [R: $21,12 \text{ g}$]
15. Tristrana 4 dm visoka prizma ima osnovne robove 17 cm , 25 cm in 28 cm . Kolikšni sta površina in prostornina prizme? [R: 840 cm^2 , 700 cm^3]
16. Kolikšna je površina pravilne tristrane enakorobe prizme s prostornino $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$? [R: $(2\sqrt{3} + 12) \text{ cm}^2$]
17. Osnovna ploskev pokončne tristrane prizme je pravokotni trikotnik s katetama $a = 7 \text{ cm}$ in $b = 24 \text{ cm}$, višina je enaka hipotenuzi osnovne ploskve. Izračunaj površino in prostornino prizme. [R: 2100 cm^2 , 1568 cm^3]
18. Betonski opornik meri $d = 6 \text{ m}$, $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$. Izračunaj koliko m^3 betona je treba za opornik in kolikšna je površina betona, ki jo je mogoče obdelati? (glej sliko) [R: 6 m^3 , 18 m^2]



19. Izračunaj površino in prostornino 10 cm visoke pokončne prizme, ki ima za osnovno ploskev enakokrak trikotnik z osnovnico 16 cm in krakoma 17 cm . [R: 740 cm^2 , 1200 cm^3]
20. Prostornina pokončne tristrane prizme z osnovnimi robovi 13 cm , 14 cm in 15 cm meri 420 cm^3 . Izračunaj površino prizme. [R: 378 cm^2]
21. Tristrana pokončna prizma ima osnovne robove 13 cm , 37 cm in 30 cm ter površino 720 cm^2 . Izračunaj prostornino prizme. [R: 810 cm^3]
22. Izračunaj površino 20 cm visoke tristrane prizme, ki ima za osnovno ploskev pravokotni trikotnik s podatki: $a = 7 \text{ cm}$, $\alpha = 67^\circ$. [R: $372,19 \text{ cm}^2$]
23. Kolikšni sta površina in prostornina enakorobe tristrane prizme z robom $a = 5 \text{ cm}$?

$$\left[R: \left(\frac{25\sqrt{3}}{2} + 75 \right) \text{ cm}^2, \frac{125\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3 \right]$$

24. Izračunaj površino in prostornino prizme na sliki. [R: $379,36 \text{ cm}^2$, $253,64 \text{ cm}^3$]



pravilna 6 – strana prizma

25. Kolikšni sta površina in prostornina enakorobe šeststrane prizme z robom $a = 5 \text{ cm}$?
- $$\left[R: (75\sqrt{3} + 150) \text{ cm}^2, \frac{375\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3 \right]$$
26. Kako visoka bi morala biti posoda v obliki pravilne 6 – strane prizme (notranji rob osnovne ploskve meri 20 cm), da bi lahko vanjo natočili 100 kg olja ($\rho = 0,85 \text{ kg/dm}^3$)? [R: $11,32 \text{ dm}$]

(D) Vaje – piramida4 – strana piramida

27. Izračunaj površino in prostornino pravilne 4-strane piramide z osnovnim robom, dolgim 2 dm in stranskim robom 15 cm. $\left[R: (4 + 2\sqrt{5}) \text{ dm}^2, \frac{2}{3} \text{ dm}^3 \right]$
28. Osnovni rob pravilne štiristrane piramide je šestkrat daljši od višine piramide, plašč meri $48\sqrt{10} \text{ cm}^2$. Kolikšna je prostornina? [R: $v = 2 \text{ cm}$, $a = 12 \text{ cm}$, $V = 96 \text{ cm}^3$]
29. Pokončna piramida ima za osnovno ploskev pravokotnik s stranicama 24 cm in 10 cm. Kolikšen je njen stranski rob, če je višina 84 cm? [R: 85 cm]
30. Kolikšna je površina piramide, ki ima za osnovno ploskev pravokotnik s stranicama 14 cm in 30 cm, če meri stranski rob 25 cm? [R: 1356 cm²]
31. Piramida ima za osnovno ploskev romb z diagonalama 14 cm in 8 cm. Vrh piramide je na premici, ki stoji v presečišču diagonal pravokotno na ravnini romba, 15 cm oddaljen od romba. Izračunaj prostornino piramide. Kolikšni so stranski robovi? [R: $V = 280 \text{ cm}^3$, $s_1 = 15,52 \text{ cm}$, $s_2 = 16,55 \text{ cm}$]

3 – strana piramida

32. Izračunaj površino in prostornino pravilne tristrane piramide, ki ima osnovni rob $a = 12 \text{ cm}$ in višino $v = 6 \text{ cm}$. [R: 118,51 cm², $72\sqrt{3} \text{ cm}^3$]
33. Izračunaj površino in prostornino 21 cm visoke pravilne tristrane piramide, katere stranska višina meri 29 cm. $\left[R: a = 40\sqrt{3} \text{ cm}, 2940\sqrt{3} \text{ cm}^2, 8400 \text{ cm}^3 \right]$
34. Prostornina tristrane piramide z osnovnimi robovi 4 cm, 13 cm in 15 cm je 120 cm³. Izračunaj višino. [R: $S_o = 24 \text{ cm}^2$, $v = 15 \text{ cm}$]

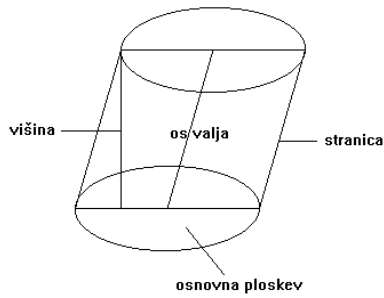
pravilna 6 – strana piramida

35. Izračunaj površino in prostornino 21 cm visoke pravilne šeststrane piramide, katere stranska višina meri 29 cm. $\left[R: a = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, 780\sqrt{3} \text{ cm}^2, 1400\sqrt{3} \text{ cm}^3 \right]$
36. Kolikšni sta površina in prostornina pravilne šeststrane piramide z osnovnim robom 8 cm, če je plašč $\frac{5}{3}$ osnovne ploskve? $\left[R: 256\sqrt{3} \text{ cm}^2, v_1 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, v = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, 512 \text{ cm}^3 \right]$
37. Pravilna šeststrana piramida ima višino 13 cm in osnovni rob 6 cm. Izračunaj stransko višino in plašč piramide. [R: 14 cm, 252 cm²]
38. Pravilna šeststrana piramida ima višino 12 cm in osnovni rob 6 cm. Izračunaj kot med osnovno ploskvijo in stranskim robom ter kot med osnovno in stransko ploskvijo. [R: 63,43°, 66,59°]

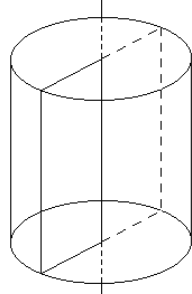
(E) Okroglata geometrijska telesa

OKROGLA GEOMETRIJSKA TELESA - LASTNOSTI

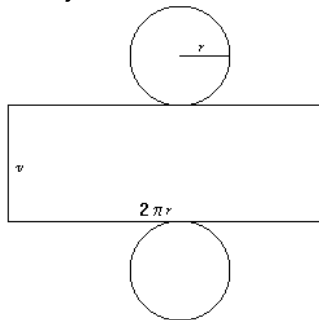
Valj:



Osni presek pokončnega valja:



Mreža valja:



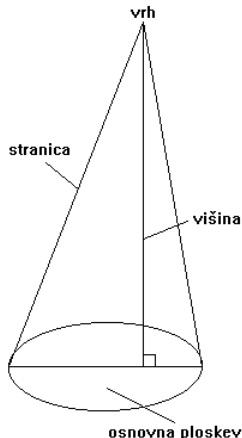
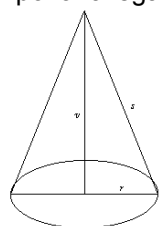
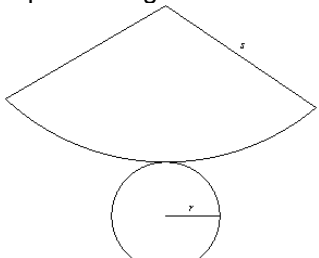
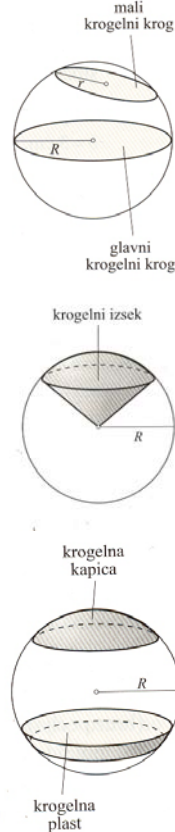
Valj je geometrijsko telo, ki je omejeno z:

- dvema osnovnima ploskvama (to sta vzporedna kroga)
- plaščem, ki ima obliko pravokotnika

Pokončni krožni valj je rotacijsko telo, ki nastane z vrtenjem pravokotnika okoli:

- ene od stranic za 360°
- ene od obeh simetrijskih osi za 180°

Premica, ki gre skozi središči obeh osnovnih ploskev je os valja.Višina valja je razdalja med osnovnima ploskvama.Valj je pokončen, če je stranica valja enaka višini, sicer je poševen.Osni presek pokončnega valja je pravokotnik, poševnega pa paralelogram.**Površina valja:** $P = 2 O + pl = 2\pi r (r + v)$ **Prostornina valja:** $V = O v = 2\pi r v$ Valje je enakostraničen, če je stranica enaka premeru osnovne ploskve.Površina enakostraničnega valja: $P = 6\pi r^2$ Prostornina enakostraničnega valja: $V = 2\pi r^3$

<p>STOŽEC</p>	<p>Stožec:</p>  <p>Osnni presek pokončnega stožca:</p>  <p>Mreža pokončnega stožca:</p> 	<p>Stožec je geometrijsko telo, ki je omejeno z:</p> <ul style="list-style-type: none"> – eno osnovno ploskvijo (krog) – plaščem, ki ima obliko <u>krožnega izseka</u>, katerega <u>lok</u> je enak obsegu osnovne ploskve, <u>polmer</u> pa <u>stranici</u> stožca <p>Razdalja od vrha do točke na robu osnovne ploskve je <u>stranica</u> stožca.</p> <p>Če so vse stranice stožca enake, je stožec <u>pokončen</u>, sicer je <u>poševen</u>.</p> <p><u>Višina</u> stožca je razdalja od vrha do osnovne ploskve.</p> <p>Pokončen stožec je <u>rotacijsko telo</u>, ki nastane z vrtenjem pravokotnega trikotnika okoli ene od katet za 360°.</p> <p>Ploščina plašča: $S_{pl} = \pi r \cdot s$</p> <p>Površina pokončnega stožca: $P = O + pl = \pi r (r + s)$</p> <p>Prostornina pokončnega stožca: $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$</p> <p>Stožec je <u>enakostraničen</u>, če je stranica enaka premeru osnovne ploskve.</p> <p>Površina enakostraničnega stožca: $P = 3\pi r^2$</p> <p>Prostornina enakostraničnega stožca: $V = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}$</p>
<p>KROGLA</p>		<p>Krogla je geometrijsko telo, omejeno s <u>sfero</u>. Sfera je množica točk v prostoru, ki so enako oddaljene os središča.</p> <p>Krogla je tudi <u>rotacijsko telo</u>, ki nastane z vrtenjem:</p> <ul style="list-style-type: none"> – kroga okoli enega od premerov za kot 180° – polkroga okoli premera za kot 360° <p>Presek krogle z ravnino, ki ne poteka skozi središče krogle, je <u>mali krogelni krog</u>.</p> <p><u>Glavni krogelni krog</u> gre skozi središče krogle in razdeli kroglo na dve <u>polkrogli</u>.</p> <p><u>Krogelni odsek</u> je del krogle, ki ga omejujeta krogelni krog in <u>krogelna kapica</u>.</p> <p><u>Krogelni izsek</u> je del krogle, ki ga sestavljata krogelni odsek in pokončni stožec, katerega osnovna ploskev je krog krogelnega odseka, vrh pa središče krogle.</p> <p><u>Krogelna plast</u> ali <u>krogelna rezina</u> je del krogle med vzporednima ravninama krogelnih krogov.</p> <p>Površina krogle: $P = 4 \pi R^2$</p> <p>Prostornina krogle: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$</p>

(F) Vaje – valj

39. 4-metrski hlod meri v premeru 24 cm. Koliko lesa je v njem in koliko tehta, če je gostota lesa $0,5 \text{ g/cm}^3$? [R: $180,96 \text{ dm}^3$, $90,48 \text{ kg}$]
40. Prostornina pokončnega valja meri 352 cm^3 , plašč pa 176 cm^2 . Izračunaj višino in površino. [R: $r = 4 \text{ cm}$, $v = 7 \text{ cm}$, $(32\pi + 176) \text{ cm}^2$]
41. Medeninasta cev ima zunanji premer 8 cm, notranji premer 6 cm, dolžina cevi je 1,5 m. Koliko tehta, če je gostota medenine $8,9 \text{ g/cm}^3$? [R: $117,43 \text{ kg}$]
42. Konzerva ima obliko enakostraničnega valja, ki je znotraj visok 12 cm. Koliko kg mezge lahko konzerviramo v 1000 takih konzervah, če je gostota mezge $1,3 \text{ kg/dm}^3$? [R: $1764,32 \text{ kg}$]
43. V valjasti posodi s premerom 12 cm je toliko vode, da lahko vanjo potopimo tristrano prizmo z osnovnimi robovi 5 cm, 6 cm in 7 cm ter višino 10 cm, tako da voda ne izteče. Za koliko cm se dvigne voda v posodi? [R: $1,3 \text{ cm}$]
44. Površina pokončnega valja meri $520\pi \text{ cm}^2$, stranica pa 7 cm. Kolikšen je polmer valja? [R: 13 cm]
45. Površina pokončnega valja meri $500\pi \text{ cm}^2$, stranica pa 15 cm. Kolikšna je ploščina osnega preseka valja? [R: 300 cm^2]
46. Površina pokončnega valja meri $72\pi \text{ cm}^2$, osni presek pa meri 54 cm^2 . Kolikšen je njegov plašč? [R: $54\pi \text{ cm}^2$]
47. Površina valja meri 660 cm^2 , višina pa 8 cm. Izračunaj prostornino valja $\left[\pi \approx \frac{22}{7} \right]$. [R: $r = 7 \text{ cm}$, $V = 1232 \text{ cm}^3$]
48. Enakoroba 6 – strana železna prizma z osnovnim robom 4 cm je prevrtana tako, da gre valjasta luknja (premer 2 cm) pravokotno skozi osnovni ploskvi. Izračunaj maso ($\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$) tega telesa. [R: $1,2 \text{ kg}$]
49. Iz pokončnega valja s polmerom 6 cm in višino 20 cm izrežemo največjo možno pravilno šeststrano pravilno prizmo. Koliko odstotkov valja so odrezki? [R: $V_v = 720\pi \text{ cm}^3$, $V_p = 1080\sqrt{3} \text{ cm}^3$, $17,3\%$]
50. Osni presek valja je pravokotnik s ploščino 48 cm^2 in diagonalo 10 cm. Izračunaj površino in prostornino valja.
[R: $r_1 = 4 \text{ cm}$, $v_1 = 6 \text{ cm}$, $P_1 = 80\pi \text{ cm}^2$, $V_1 = 96\pi \text{ cm}^3$, $r_2 = 3 \text{ cm}$, $v_2 = 8 \text{ cm}$, $P_2 = 66\pi \text{ cm}^2$, $V_2 = 72\pi \text{ cm}^3$]
51. Ploščina osnega preseka pokončnega valja meri 72 cm^2 , obseg osnovne ploskve pa $18\pi \text{ cm}$. Kolikšni sta površina in prostornina valja? [R: $234\pi \text{ cm}^2$, $324\pi \text{ cm}^3$]
52. Osni presek poševnega valja je romb za diagonalama 10 cm in 24 cm. Kolikšna je prostornina valja? [R: $r = 7,5 \text{ cm}$, $v = 9,23 \text{ cm}$, $V = 1631,08 \text{ cm}^3$]
53. Koliko tehta svinčena vodovodna cev ($\rho = 11,4 \text{ g/cm}^3$), če meri zunanji premer 5 cm, debelina stene meri 4 mm, cev je dolga 3 m? [R: $V = 288\pi \text{ cm}^3$; $10,31 \text{ kg}$]
54. Osni presek valja meri 240 cm^2 , premer osnovne ploskve in višina valja sta v razmerju 12 : 5. Izračunaj površino in prostornino valja. [R: $r = 12 \text{ cm}$, $v = 10 \text{ cm}$, $P = 528\pi \text{ cm}^2$, $V = 1440\pi \text{ cm}^3$]
55. Plašč valja meri $48\pi \text{ cm}^2$, polmer osnovne ploskve in višina valja sta v razmerju 2 : 3. Izračunaj kot med diagonalo osnega preseka in osnovno ploskvijo. [R: $r = 4 \text{ cm}$, $v = 6 \text{ cm}$, $36,87^\circ$]

(G) Vaje – stožec

56. Izračunaj prostornino in površino pokončnega stožca, pri katerem meri premer osnovne ploskve 4 dm, stranica pa 29 cm. [R: $v = 21$ cm, $P = 980\pi$ cm², $V = 2800\pi$ cm³]
57. Obseg osnovne ploskve pokončnega stožca meri 44 cm, plašč meri 396 cm². Izračunaj prostornino. [R: $r = 7$ cm, $s = 18$ cm, $v = 5\sqrt{11}$ cm, $V = \frac{770\sqrt{11}}{3}$ cm³]
58. Pri pokončnem stožcu meri višina 10 cm, naklonski kot stranice proti osnovni ploskvi pa meri 52°30'. Izračunaj plašč stožca. [R: 303,61 cm²]
59. Površina enakostraničnega stožca meri 12π cm². Izračunaj ploščino osnega preseka. [R: $4\sqrt{3}$ cm²]
60. Na 8 cm visokem pokončnem valju s polmerom dolгим 9 cm stoji pokončni stožec z isto osnovno ploskvijo in višino 12 cm. Izračunaj površino in prostornino telesa. [R: 360π cm², 1170π cm³]
61. Iz pravilne 6 – strane piramide ($a = 4$ cm, $v = 12$ cm) je izrezan včrtani stožec. Izračunaj prostornino telesa. [R: $r = 2\sqrt{3}$ cm, $V = 48\pi$ cm³]
62. Najdaljša stranica poševnega stožca meri 20 cm, najkrajša pa 13 cm. Kolikšna je prostornina stožca, če meri obseg osnovne ploskve 21π cm? [R: $S_{\Delta} = 126$ cm², $v = 12$ cm, $V = 84\pi$ cm³]

(H) Vaje – krogla

63. Kovinski polkrogli s polmerom 4 cm in 3 cm pretalimo v kroglo. Kolikšen je polmer nove krogle? [R: 4,5 cm]
64. Masiven valjar iz litega železa se končuje na obeh straneh v polkrogli. Dolžina valja je 1,4 m, premer pa 6 dm. Koliko tehta, če je gostota železa 7,2 kg/dm³? [R: $V = 162\pi$ dm³, $m = 3,66$ t]
65. Votla polkrogla ima zunanji premer 16 cm in debelino stene 1 cm. Izračunaj površino in prostornino telesa. [R: $V = \frac{338\pi}{3}$ cm³, $P = 241\pi$ cm²]
66. Iz lesenega valja ($r = 6$ cm, $v = 8$ cm) je izrezana polkrogla, ki ima z valjem skupno osnovno ploskev, na drugi osnovni ploskvi pa stoji enakostranični stožec z isto osnovno ploskvijo. Izračunaj površino in prostornino telesa. [R: 240π cm², $(144 + 72\sqrt{3})\pi$ cm³]
67. Telo je sestavljeno iz polkrogle, valja in stožca, kakor prikazuje slika. Polmer R meri 6 cm, stranica valja meri 5 cm, stranica stožca pa 10 cm. Izračunaj površino in prostornino telesa. [R: 420π cm³, 204π cm²]

