Kombinatorika - Permutacije

Permutacije brez ponavljanja

Permutacija je bijektivna preslikava kake končne množice nase; določena je z razporedom elementov izbrane množice.

Število permutacij množice z *n* elementi je:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Dogovor: 0!=1

Ker elementov izbire ne ponavljamo, je torej vedno ena izbira manj v naslednji fazi!

Primer:
Nakoliko načinov lahko razporedimo na polici 5 leposlovnih in 6 strokovnih knjig, če morajo istovrstne knjige stati skupaj?
5!6!2!=172800
Premeščamo lahko leposlovne knjige med seboj (5!), strokovne med seboj (6!), pa še obe skupini istovrstnih knjig (2!).

Permutacije s ponavljanjanjem

Permutacije *n* simbolov s ponavljanjem so razporedi na *n* mestih, na katerih večkrat nastopa en ali več (različnih) simbolov.

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n_1}{k_1! k_2! \ldots k_n!}$$

Zapiši in preštej permutacije s ponavljanjem črk besede MARA.

AAMR, AARM, AMAR, AMRA, ARAM, ARMA, MAAR, MARA, MRAA, RAAM, RAMA, RMAA

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$$

4! označuje vse črke, 2! pa označuje, kolikokrat se ena črka (v tem primeru A) ponovi. Ostale črke se uporabijo samo enkrat, zato 1!=1.

Variacije brez ponavljanja

Variacija brez ponavljanja reda *r* iz *n* elementov je injektivna preslikava množice N_r v dano množico z močjo *n* (*r* je manjši ali enak *n*-ju)

Preslikavo podaja niz *r* različnih elementov izmed *n* elementov dane množice.

Število variacij brez ponavljanja reda *r* iz *n* elementov je:

$$V_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Primer:
Koliko trimestnih številk brez ponavljanja cifer lahko zapišemo s ciframi 1, 4, 5, 8, 9?

$$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Variacije s ponavljanjanjem

Variacija s ponavljanjem reda *r* iz *n* elementov je preslikava množice N_r v dano množico z močjo *n*.

Preslikavo podaja niz *r* elementov izmed *n* elementov dane množice, v katerem lahko posamezni elementi nastopajo večkrat.

Število variacij s ponavljanjem reda *r* iz *n* elementov je:

$$^{(p)}V_n^r = n^r$$

Primer:
Desetkrat vžemo igralno kocko. V koliko izidih pade šestica natanko v drugem, tretjem in petem metu?
Šestica pade v drugem, tretjem in petem mestu, v ostalih sedmih metih (7) pa ne (5).

$$^{(p)}V_5^7 = 5^7$$

Kombinacije brez ponavljanja

Kombinacije reda *r* iz *n* elementov so podmnožice z močjo *r* kake končne množice z močjo *n*. Njihovo število je:

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$, binomski simbol

Na koliko načinov lahko izmed 5 fantov in 5 deklet izberemo skupino 3 fantov in 2 deklet?

$$C_5^3 \cdot C_5^2 = \binom{5}{3}\binom{5}{2} = 100$$

Kombinacije s ponavljanjanjem

Kombinacije s ponavljanjem reda *r* iz *n* elementov dane množice so izbori, v katerih lahko posamezni elementi nastopajo večkrat (brez omejitve ponavljanja). Njihovo število je:

$$^{(p)}C_n^r = C_{n+r-1}^r = \binom{n+r-1}{r}$$

Zapiši in preštej vse kombinacije s ponavljanjem, ki jih kaže število pik pri metanju dveh igralnih kock.
11, 12, 13, 14, 15, 16; 22, 23, 24, 25, 26; 33, 34, 35, 36; 44, 45, 46; 55, 56; 66;

$$^{(p)}C_6^2 = C_7^2 = \binom{7}{2} = 21$$