11.Linearna funkcija

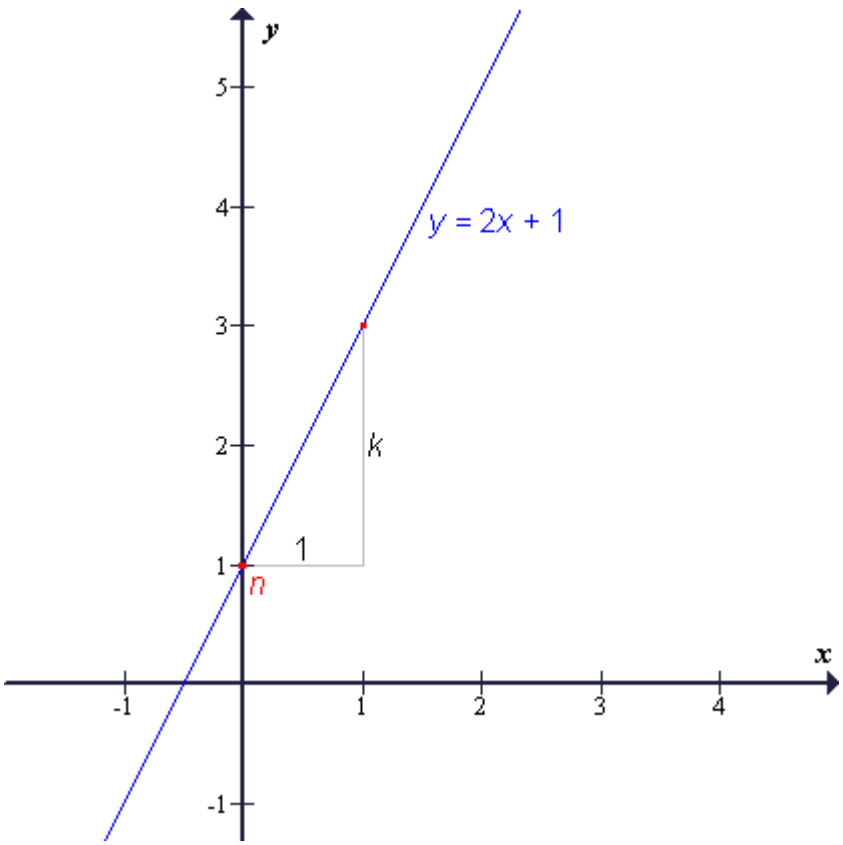
Linearna funkcija je funkcija, ki jo lahko zapišemo v obliki $f(x) = kx + n$, kjer sta koeficienta k in n poljubni realni števili.

11.1. Graf linearne funkcije

Graf linearne funkcije je **premica**. Ker dve točki natančno določata premico, lahko graf linearne funkcije narišemo tako, da izračunamo koordinate dveh točk.

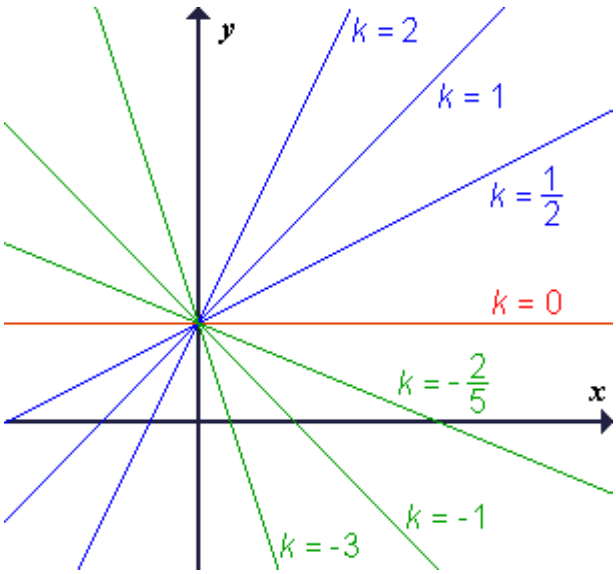
Pogosto si pri risanju pomagamo kar s točkama, ki ju določata koeficienta k in n:
Število n pomeni presečišče grafa z ordinatno osjo ($f(0) = n$). Imenujemo ga odsek na osi y, ali tudi **začetna vrednost** (s točko $N(0, n)$ začnemo risati graf linearne funkcije).
Število k določa smer premice, zato ga imenujemo **smerni koeficient**. Ustrezno točko dobimo tako, da se iz točke N pomaknemo za eno enoto v desno in za k enot navzgor (oziroma navzdol, če je k negativen).

Zgled:
Narišimo graf funkcije $f(x) = 2x + 1$



Če je $k > 0$, linearna funkcija narašča.

Če je $k < 0$, linearna funkcija pada.
Če je $k = 0$, je linearna funkcija **konstantna**. Graf je v tem primeru vzporeden abscisni osi. (Torej: Graf konstantne funkcije je vodoravna premica.)



11.2. Enačba premice

Graf linearne funkcije je premica, torej lahko enačbo premice zapišemo kot enačbo grafa linearne funkcije: $y = kx + n$. To obliko enačbe imenujemo **eksplicitna oblika enačbe premice**.
Žal v tej obliki ne moremo zapisati enačbe vsake premice v ravnini. Navpična premica (premica vzporedna ordinatni osi) namreč ni graf nobene funkcije.

Enačbo navpične premice lahko zapišemo v obliki: $x = m$.

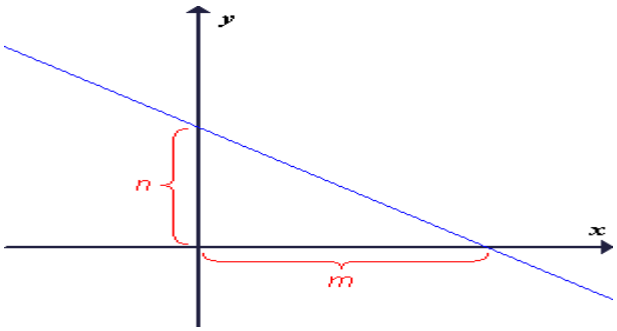
Če želimo vse premice v ravnini zapisati z enačbo enake oblike, moramo uporabiti **implicitno obliko enačbe premice**: $ax + by + c = 0$.

Implicitna oblika enačbe premice ni enolično določena. Če enačbo pomnožimo ali delimo s poljubnim od 0 različnim številom, dobimo drugo implicitno enačbo za isto premico. Implicitna oblika enačbe žal tudi nič ne pomaga pri risanju premice.

Za lažje risanje uporabljamo tudi **segmentno (odsekovno) obliko enačbe premice:**

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

Števili m in n pomenita odseka (segmenta), ki ju premica omejuje na abscisni oziroma na ordinatni osi.



V segmentni obliki lahko zapišemo enačbo vsake premice v ravnini, razen: (1) navpične premice, (2) vodoravne premice, (3) premice, ki poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema.

11.3. Enačba premice skozi dve dani točki

Če poznamo koordinati točk $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$, lahko izračunamo smerni količnik premice, ki poteka skozi ti dve točki po formuli:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Število n lahko določimo s pomočjo enačbe $y = kx + n$ (v enačbo vstavimo že izračunani k in koordinati ene od podanih točk)

Če je $x_1 = x_2$, je premica vzporedna ordinatni osi. V tem primeru k ne obstaja (in tudi eksplicitna oblika enačbe ne obstaja), enačbo premice pa lahko zapišemo v obliki $x = m$ (pri tem je seveda $m = x_1 = x_2$).

11.4. Kot med premicama

Naklonski kot premice je kot, ki ga oklepata ta premica in abscisna os.
Za naklonski kot premice s smernim koeficientom k velja formula:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = k$$

Če je $k > 0$, je α ostri kot.
Če je $k < 0$, lahko izberemo α na dva načina: ali izberemo topi kot ali pa negativni ostri kot.
Če je $k = 0$, je premica vzporedna abscisni osi. V tem primeru določimo, da je $\alpha = 0$.

Kot med premicama izračunamo s pomočjo naklonskih kotov obeh premic ($\varphi = |\alpha_2 - \alpha_1|$), lahko pa tudi s pomočjo smernih koeficientov po naslednji formuli:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

Premici *p* in *q* sta pravokotni samo, če je imenovalec v zgornjem ulomku enak 0.
Torej velja:

$$p \perp q \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad \textbf{(pogoj pravokotnosti)}$$

Če sta premici *p* in *q* vzporedni, pravimo, da je kot med njima enak 0.
Velja:

$$p \parallel q \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = k_1 \quad \textbf{(pogoj vzporednosti)}$$

11.5. Linearna enačba z eno neznanko

Linearna enačba (z eno neznanko) je vsaka enačba, ki jo lahko zapišemo v obliki $kx + n = 0$ (kjer sta koeficienta *k* in *n* poljubni realni števili).

- **Če je $k = n = 0$**, potem je rešitev linearne enačbe vsako realno število: $R = \mathbb{R}$.
- **Če je $k = 0$ in $n \neq 0$,** potem je linearna enačba nerešljiva: $R = \{\ \}$.
- **Če sta števili *k* in *n* obe različni od 0**, potem ima linearna enačba točno eno rešitev: $R = \left\{-\frac{n}{k}\right\}$.

11.6. Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama

Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama (na kratko: **sistem 2 × 2**) je sistem oblike:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

(kjer so *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in *f* dana realna števila).

Enačbi, ki sestavljata sistem 2 × 2, sta enačbi premic v ravnini.
Rešitev sistema 2 × 2 je par števil (*x*, *y*), ki geometrijsko pomeni koordinati presečišča teh dveh premic.
Sistem 2 × 2 ima lahko 0, 1 ali neskončno mnogo rešitev:

- Če sta premici vzporedni, se ne sekata. V tem primeru je sistem enačb nerešljiv.
- Če se premici sekata, je rešitev točno ena točka oziroma točno en par števil (*x*, *y*),

namreč presečišče.

- Lahko se zgodi tudi, da obe enačbi predstavljata isto premico. V tem primeru je rešitev sistema enačb vsaka točka, ki leži na tej premici.

11.7. Linearne neenačbe

 Linearna neenačba z eno neznanko je vsaka neenačba, ki jo lahko zapišemo v obliki ***kx + n > 0*** (kjer sta koeficienta *k* in *n* poljubni realni števili).
Namesto znaka **>** lahko nastopa tudi katerikoli od ostalih znakov neenakosti: **<**, **≤** ali **≥**.

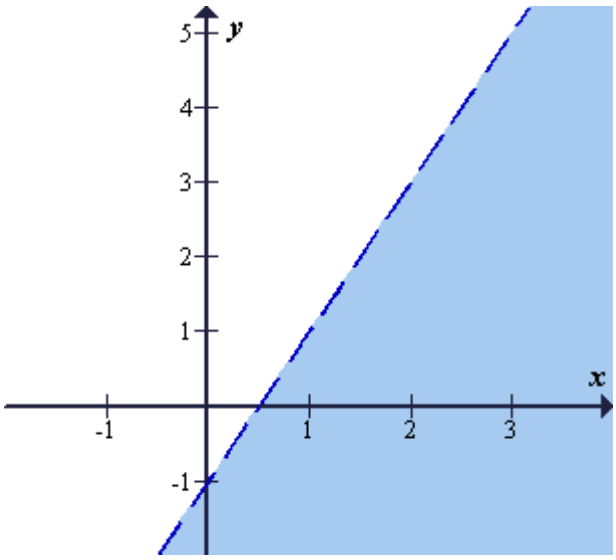
Linearno neenačbo z eno neznanko **rešimo** s preoblikovanjem po splošnih pravilih za reševanje neenačb.

Rešitve ponavadi sestavljajo neskončni interval, lahko pa se zgodi tudi, da je neenačba nerešljiva ali da je rešitev vsako realno število.

 Linearna neenačba z dvema neznankama je vsaka neenačba, ki jo lahko zapišemo v obliki ***ax + by + c > 0*** (kjer so koeficienti *a*, *b* in *c* poljubna realna števila in *a* in *b* nista oba hkrati enaka 0).
Namesto znaka **>** lahko nastopa tudi katerikoli od ostalih znakov neenakosti: **<**, **≤** ali **≥**.

Rešitve neenačbe z dvema neznankama ponavadi ponazorimo s točkami v ravnini.
Množica vseh rešitev linearne neenačbe z dvema neznankama je **polravnina**, ki ima za rob premico z enačbo $ax + by + c = 0$.

Zgled:
Rešimo neenačbo: $2x - y - 1 > 0$
Najprej jo preoblikujmo v lepšo obliko:
$-y > -2x + 1 \quad / \cdot(-1)$
$y < 2x - 1$
V koordinatnem sistemu narišemo premico $y = 2x - 1$. Narišemo jo črtkasto, ker točke na tej premici niso rešitve (v neenačbi ne velja enačaj). Množica vseh rešitev je polravnina pod to premico (znak **<**).


y
x
5
4
3
2
1
-1
-1
1
2
3