Polinomi

Polinom stopnje n ($n \in \mathbb{N}_0$) je vsaka funkcija, ki jo lahko zapišemo z enačbo oblike:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pri tem so koeficienti a_n, a_{n-1}, . . . , a_2, a_1 in a_0 poljubna realna števila, koeficient a_n pa mora biti različen od 0 (polinom je stopnje n samo, če potenca x^n v polinomu res nastopa).

Koeficient a_n (koeficient pri najvišji potenci, ki v polinomu nastopa) se imenuje **vodilni koeficient** polinoma.
Člen $a_n x^n$ se imenuje **vodilni člen** polinoma.
Koeficient a_0 (koeficient brez x), se imenuje **prosti koeficient** ali tudi **prosti člen** polinoma.

Stopnjo polinoma p označimo: st(p)
Polinom druge stopnje je kvadratna funkcija.
Polinom prve stopnje je linearna funkcija.
Polinom ničte stopnje je konstantni polinom $p(x) = a$ (za $a \neq 0$).
Kot poseben primer uvrstimo v množico polinomov tudi **ničelni polinom** - to je polinom, ki je konstantno enak 0. Ničelni polinom nima definirane stopnje (pravimo tudi, da ima stopnjo minus neskončno).

17.1.Računanje s polinomi

Če v enačbo polinoma vstavimo dano število a, lahko izračunamo vrednost polinoma $p(a)$ (vrednost polinoma v točki a oziroma vrednost polinoma pri $x = a$).
Polinome lahko seštevamo, odštevamo in množimo. Rezultat vsake od teh računskih operacij je spet polinom.

V množici polinomov lahko izvajamo tudi računsko operacijo deljenje z ostankom
Velja:

Osnovni izrek o deljenju polinomov:

Poljuben polinom deljenec p lahko delimo s poljubnim neničelnim polinomom deliteljem q in pri tem dobimo polinom količnik $k(x)$ in polinom ostanek $o(x)$, tako da velja
$p(x) = q(x)\, k(x) + o(x)$ (tj. velja preizkus pri deljenju) in
st(o) < st(q) (tj. stopnja ostanka je manjša od stopnje delitelja)

Pri deljenju polinoma p s polinomom $(x - a)$ je ostanek vedno število (ker je stopnja delitelja 1, mora biti stopnja ostanka manjša od 1). Izkaže se, da je to število enako vrednosti polinoma $p(a)$.
Deljenje polinoma p s polinomom $(x - a)$ lahko zapišemo na krajši način s Hornerjevim algoritmom.

17.2.Ničle polinoma

Če je število a ničla polinoma p, je ostanek pri deljenju polinoma p s polinomom $(x - a)$ enak 0 (deljenje se izide brez ostanka). Torej lahko v tem primeru polinom p zapišemo v obliki:

$$p(x) = (x - a)\, k(x)$$

Odgovor na vprašanje, kateri polinomi sploh imajo ničle, podaja **Gaußov izrek**, ki ga imenujemo tudi **Osnovni izrek algebre polinomov**:

Vsak nekonstanten polinom ima v $\mathbb{C}$ vsaj eno ničlo.

Posledica Gaußovega izreka:
Polinom stopnje n (za $n > 0$) lahko zapišemo v razcepljeni (ničelni) obliki:

$$p(x) = C\,(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Števila x_1, x_2, ..., x_n, ki nastopajo v razcepljeni obliki so ravno vse ničle polinoma p.
Če so vsa ta števila med seboj različna, vidimo, da ima polinom stopnje n točno n ničel. Če so nekatera (ali tudi vsa) od teh števil med sabo enaka, je ničel seveda manj kot n.
Če ničla x_m v razcepljeni obliki nastopa k-krat, pravimo, da je to **k-kratna ničla polinoma** (oziroma ničla stopnje k). Če vsako ničlo polinoma štejemo tolikokrat, kolikor je njena stopnja, lahko rečemo, da ima polinom stopnje n vedno točno n ničel.

Čeprav so koeficienti polinoma realna (ali kar cela) števila, so ničle polinoma v splošnem lahko nerealne. Velja pa pravilo: Če ima polinom z realnimi koeficienti nerealne ničle, potem te nastopajo v konjugiranih parih.

Iskanje ničel polinoma

Žal ne obstaja preprosto splošno pravilo za iskanje ničel polinoma.
Pri iskanju ničel najpogosteje uporabljamo naslednje metode (oziroma kombinacijo naslednjih metod):

- **Razcepljanje:** Polinom razcepimo po pravilih za razcepljanje izrazov in iz razcepljene oblike razberemo ničle.

- **Inteligentno ugibanje:** Ničlo *a* »uganemo« in s Hornerjevim algoritmom preverimo, da je to res ničla, potem pa polinom razcepimo v obliko: $p(x) = (x - a)\, k(x)$.
  Da je ugibanje res inteligentno se ravnamo po naslednjih pravilih:
  (1) Cele ničle polinoma s celimi koeficienti iščemo samo med delitelji prostega člena.
  (2) Racionalne ničle polinoma s celimi koeficienti iščemo samo med ulomki, ki imajo v števcu delitelj prostega člena, v imenovalcu pa delitelj vodilnega koeficienta.

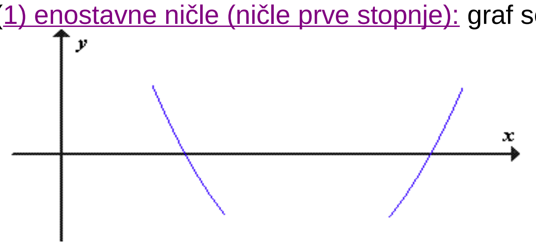
- **Numerične metode:** Če druge metode odpovejo, poiščemo približne vrednosti ničel z numeričnimi metodami.
  Najbolj znana numerična metoda je **metoda bisekcije**:
  Najprej poiščemo interval $[a, b]$, na katerem polinom (oziroma poljubna zvezna funkcija) spremeni predznak (v enem krajišču je funkcija pozitivna, v drugem pa negativna).
  Potem izračunamo razpolovišče intervala: $c = \frac{1}{2}(a + b)$.
  Ugotovimo, na katerem od manjših intervalov $[a, c]$ ali $[c, b]$ funkcija spremeni predznak, in postopek nadaljujemo na tem intervalu.

17.3.Graf polinoma

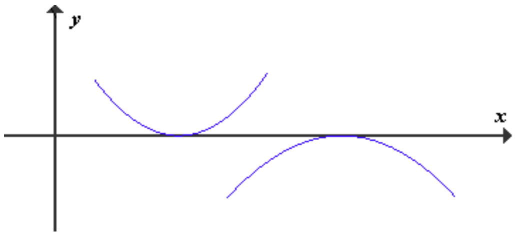
Polinom je zvezna funkcija. To pomeni, da je graf polinoma nepretrgana krivulja. Pri risanju grafa polinoma upoštevamo naslednja pravila:

- **Graf polinoma, ko gre *x* proti $\pm\infty$,** je podoben grafu vodilnega člena tega polinoma ($y = a_n x^n$).
  Torej je podoben grafu potenčne funkcije $y = x^n$ raztegnjene z raztegom v smeri osi *y* za a_n.

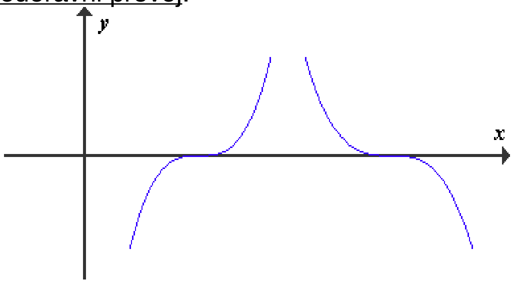
- **Graf polinoma v okolici ničle *k*-te stopnje** je podoben kot graf potenčne funkcije $y = x^k$ (z ustreznim raztegom in premikom).
  To pomeni, da ločimo tri vrste ničel:
  (1) enostavne ničle (ničle prve stopnje): graf seka abscisno os pod določenim kotom.



  (2) ničle sode stopnje (tj. stopnje 2., 4., 6. itd): graf ne prečka abscisne osi, v ničli sode stopnje ima polinom lokalni ekstrem.



(3) ničle lihe stopnje večje od 1 (tj. stopnje 3., 5., 7., itd): graf prečka abscisno os, vendar tako, da se ji v okolici ničle zelo lepo prilega (ima vodoravno os za tangento) - pravimo, da ima graf v taki ničli vodoravni prevoj.



Torej ugotovimo: Predznak polinoma se spremeni samo v ničlah lihe stopnje.

Zgled:
Polinom $p(x) = (x + 1)x^2(x - 2)^3$ ima enojno ničlo pri -1, dvojno ničlo pri 0 in trojno ničlo pri 2.