POLINOMI
Konstantna, kvadratna, linearna, definirana je za vsa R števila, zaloga vrednosti je podmnožica R števil.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$

a_0 = prosti člen
a_n = vodilni koeficient
n = stopnja polinoma

Polinomi so enaki, če je enaka stopnja in enaki koeficienti pri potencah iste stopnje. Ničelni polinom je ko so vsi koeficienti enaki 0.
OPERACIJE:
+, - → notranja, asociativna, komutativna, enota, obrnljivi elementi/ člene z enako potenco
Množenje → -||- vsak člen z vsakim, notranja, asociativna, komutativna, enota

Deljenje: za vsak polinom p, stopnje n in polinom q, stopnje m (n>m) obstajata natanko določena polinoma k in r da velja:
p(x) = k(x) * q(x) + r(x) deljenec = kvocient * delitelj + ostanek
stopnja k(x) = m-n, stopnja r(x) je manjša od stopnje q(x) ali pa je r(x) = 0

Hornerjev algoritem omogoča hitrejše in preglednejše deljenje polinoma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ z linearnim polinomom q(x) = x-c.
Podobno olajšamo deljenje z polinomom $q(x) = x^2 - px - q$) → najprej delimo z p potem pa dobljen polinom k(x) delimo še z q(x).

Ničle polinoma
Ostanek pri deljenju polinoma p(x) s polinomom x-a, kjer je a število, je enak vrednosti polinoma p(x) pri x = a. → p(x) = k(x) (x-a) +p(a)
Če je p(a) = 0, je število **ničla** polinoma. To je natanko tedaj, ko je polinom p(x) deljiv s polinomom x-a, torej je p(x) = k(x) (x-a). V primeru, ko je $p(x)=q(x)(x-a)^m$ (m € N) in q(a) ni 0, je število a ničla polinoma p(x) stopnje m.

Osnovni izrek algebre; vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti ima vsaj eno kompleksno ničlo. **Posledice:** vsak polinom p(x) s kompleksnimi koeficienti stopnje n >ali enako 1 ima natanko n kompleksnih ničel x_1, x_2, …x_n **dokaz posledice:** če je ničla polinoma enaka x_1, je polinom p deljiv z polinomom $(x-x_1)$. → $p(x) = k_1(x)(x-x_1)$ Če je n>1, potem je polinom k_1, ki je stopnje n-1, nekonstanten in tudi zanj velja, da ima vsaj eno ničlo, denimo x_2. polinom k_1 je deljiv z $(x-x_2)$ → $k_1(x) = k_2(x)(x-x_2)$ in potem je $p(x)=k_2(x)(x-x_2)(x-x_1)$.
Tako se lahko n-krat sklicujemo na osnovni izrek algebre in izrek o deljenju polinomov, in dobimo $\mathbf{p(x)= a_n(x-x_n)\dots(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)}$
Dvakratno ničlo določiš tako, da 2krat uporabiš hornerja, deliš enkrat in q(x) deliš z isto cifro.

Iskanje ničel
- ničle uganemo (recimo za 1,-1)
- poiščemo celoštevilske ničle → delitelji prostega člena (*dokaz v spatiumu)*
- poiščemo racionalne ničle → med okrajšanimi ulomki oblike c/d, pri čemer mora imenovalec d deliti vodilni koeficient, števec c pa mora deliti prosti člen (*spatium)*

$D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

Graf polinoma:

- sekanje abscisne in ordinatne osi → ordinatna os $(0,a_0)$ $p(0) = a_2$ začetna vrednost. Absciso polinom seka v ničlah $p(x)=0$.
- Obnašanje v okolici ničel → odvisno od kratnosti ničle. **LIHA** ničla (enkratna, trikratna, petkratna) –graf seka abscisno os; v lihi ničli polinom spremeni predznak. **SODA** ničla (dvakratna,…) –graf se dotakne abscisne osi ; v ničlah sode stopnje se predznak ne spremeni.

X $\qquad$ X^2

X^3 $\qquad$ X^4

Če je vrednost k v okolici x=c negativna, se graf obnaša tako:

Liha: $\qquad$ soda:

- Obnašanje grafa ko se oddaljuje od koordinatnega središča → polinom pri velikih pozitivnih in negativnih X stran od 0

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$; izpostavimo vodilni člen $a_n x^n$, gre proti 0, ko gre x v neskončno. Ko se X približuje + ali – neskončno, grejo vsi členi, ki imajo v imenovalcu potenco x proti 0. **Daleč od izhodišča se obnaša kot vodilni člen!**

+ $\qquad$ -

S:

L:

Soda fukncija-v njem nastopajo same sode potence spremenljivke x; Liha funkcija: če imajo vse potence spremenljivke x lihe exp, prosti člen pa 0. graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Preslikave:

* $y = |p(x)|$ → negativno ordinato
Y prezrcalimo prek osi X

* $y = p(|x|)$ → tisti del grafa
$y=p(x)$ na katerem ležijo točke s
pozitivno absciso pustimo
nespremenjen in ga prezrcalimo prek
ordinatne osi.

* $y = -p(x)$ → celoten graf
prezrcalimo prek abcisne osi

* $y = 2p(x)$ → osnovni graf p(x) skrčimo vzdolž ordinatne osi za faktor 2.
* $y= p(2x)$ → osnovni graf p8x) skrčimo vzdolž abcisne osi za faktor ½
* $y = p(x-2)$ → prvotni graf za dve enoti togo premaknemo v desno
* $y = p(x)-2$ → prvotni graf za dve enoti togo premaknemo navzdol

BISEKCIJA je iskanje iracionalnih ničel (z decimalnim zapisom). Če je vrednost intervala [a, b] različno predznačena, je na tem intervalu vsaj ena ničla, graf seka os x.
Določanje presečišča: predznak funkcije na sredini intervala → $\mathbf{c = a+b / 2}$
Dobimo nov interval glede na f(c) ; [a, c] ali [c, b] .
Postopek ponovimo med novim intervalom.

GRAF RACIONALNE FUNKCIJE:
1. v ničli lihe stopnje racionalna funkcija spremeni predznak, v ničli sode stopnje pa ne.
2. v polu lihe stopnje racionalna funkcija prevrže predznak, v polu sode stopnje pa ga ohranja.
3. graf racionalne funkcije ima v vsakem polu navpično asimptoto.
4. daleč od izhodišča določa vedenje racionalne funkcije kvocient vodilnih členov števca in imenovalca.

a) **Če je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca** se daleč proč od izhodišča graf funkcije približuje abscisni osi, ki je vodoravna asimptota grafa. $\mathbf{y = 0}$
b) **Če je stopnja števca enaka stopnji imenovalca** je vodoravna asimptota grafa funkcije premica $\mathbf{y= a_n/b_m}$ kjer sta a in b vodilna koeficienta v števcu in imenovalcu.
c) **Če je stopnja števca večja od stopnje imenovalca** se daleč stran od izhodišča graf približuje grafu polinoma, ki ga dobimo kot kvocient pri deljenju polinomov $\mathbf{y=kx+n}$