

## 18. Racionalne funkcije

**Racionalna funkcija** je vsaka **funkcija**, ki jo lahko zapišemo z enačbo oblike:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (\text{kjer je } p \text{ poljuben polinom, } q \text{ pa poljuben neničelni polinom}).$$

Oba polinoma lahko tudi razcepimo (po **Gaußovem izreku**) in tako dobimo razcepljeno obliko racionalne funkcije:

$$f(x) = \frac{A(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{B(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_m)}$$

V nadaljevanju bomo izhajali iz predpostavke, da je **racionalna funkcija okrajšana**, tj. da v razcepljeni obliki ne nastopa isti faktor v števcu in imenovalcu. (Števec in imenovalec bi lahko vsebovala skupni faktor, a v tem primeru bi racionalno funkcijo lahko okrajšali.)

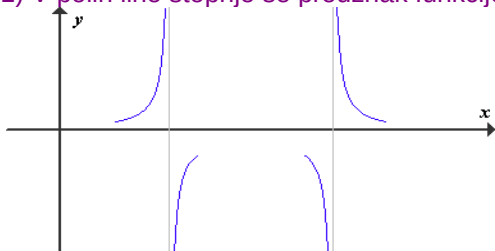
- Ničle polinoma v **števcu** so **ničle racionalne funkcije**.
- Ničle polinoma v **imenovalcu** pa so **poli racionalne funkcije**.
- Racionalna funkcija je **definirana povsod razen v polih**.

### 18.1. Graf racionalne funkcije

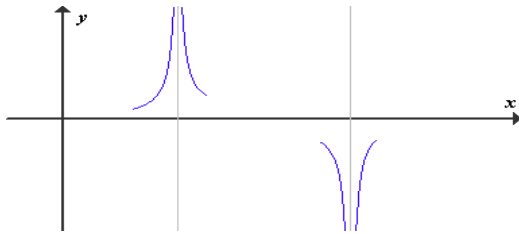
Racionalna funkcija je zvezna povsod, kjer je definirana. To pomeni, da se graf racionalne funkcije pretrga samo v polih.

Pri risanju **grafa** racionalne funkcije upoštevamo naslednja pravila:

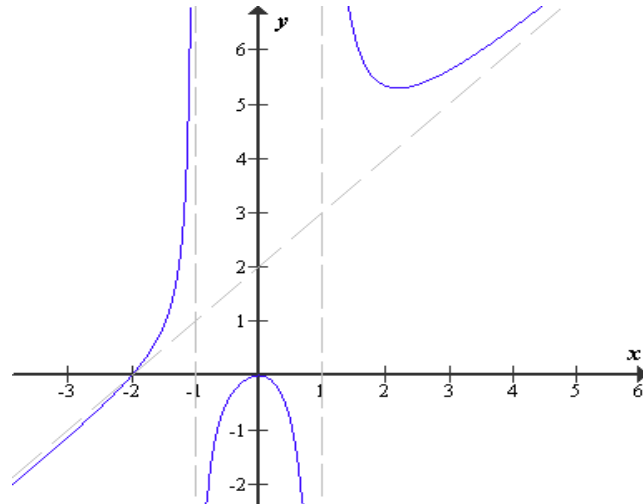
- **Graf racionalne funkcije, ko gre  $x$  proti  $\pm \infty$ :**
  - (1) Če je **stopnja imenovalca večja od stopnje števca**, se graf racionalne funkcije (ko se oddaljujemo od izhodišča koordinatnega sistema) približuje abscisni osi. Torej ima **vodoravno asimptoto  $y = 0$** .
  - (2) V splošnem pa števec racionalne funkcije delimo z imenovalcem. Pri tem dobimo polinoma količnik in ostanek. Dobljeni količnik imenujemo **asimptotski polinom**. Grafu tega polinoma se graf racionalne funkcije približuje, ko se oddaljujemo od izhodišča koordinatnega sistema. Pogosto je asimptotski polinom prve ali ničte stopnje in ima za graf premico. V tem primeru to premico imenujemo **glavna asimptota** racionalne funkcije. Graf racionalne funkcije včasih tudi seka asimptoto (oz. asimptotski polinom) - presečišča so v točkah, kjer je ostanek pri deljenju enak 0.
- **Graf racionalne funkcije v okolici ničle  $k$ -te stopnje** narišemo enako kot **graf polinoma v okolici ničle  $k$ -te stopnje**.
- **Graf racionalne funkcije v okolici pola  $k$ -te stopnje** je podoben kot **graf potenčne funkcije  $y = x^{-k}$**  (z ustreznim **raztegom** in **premikom**). To pomeni, da se graf v okolici pola vedno približuje navpični asimptoti, glede predznaka funkcije pa ločimo dve vrsti polov:
  - (1) V polih lihe stopnje se predznak funkcije spremeni.



- (2) V polih sode stopnje se predznak funkcije ohrani.



Torej ugotovimo: Predznak racionalne funkcije se spremeni smo v polih in ničlah lihe stopnje.  
Zgled:



$$f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

Racionalna funkcija:

ima

ničli: 0 (II.) in -2

pola: 1 in -1

glavno asimptoto:  $y = x + 2$

graf jo seka pri:  $x = -2$

odsek na ordinatni osi:  $f(0) = 0$