RACIONALNA FUNKCIJA

(A) Definicija

Racionalna funkcija f je realna funkcija oblike:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}.$$

Pri tem sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma, ki nimata skupnih ničel, $q(x)$ pa ni ničelni polinom.

Definicijsko območje racionalnih funkcij je množica realnih števil brez ničel imenovalca. V ničlah imenovalca racionalna funkcija ni definirana, te točke so poli racionalne funkcije.

(B) Graf racionalne funkcije

1. Ničle in obnašanje v okolici ničle

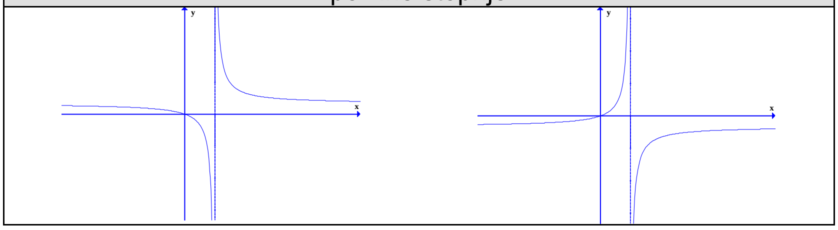
Ničle racionalne funkcije so ničle polinoma v števcu, torej tam, kjer je $p(x)=0$.
V okolici ničle se graf racionalne funkcije obnaša podobno kot graf polinoma v števcu. Če je ničla polinoma p lihe stopnje, graf v njej seka abscisno os.
Če je ničla polinoma p sode stopnje, se graf v njej dotakne abscisne osi.

2. Poli in obnašanje v okolici polov

Ničle imenovalca, to so ničle polinoma q, imenujemo poli racionalne funkcije. V polih ima funkcija navpično asimptoto.

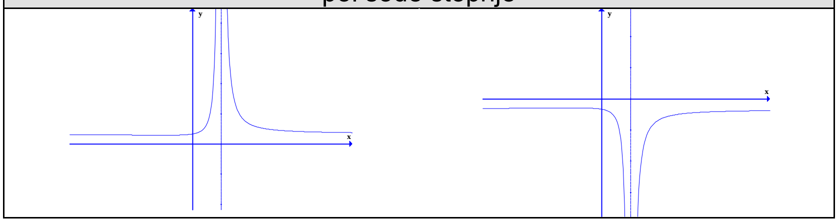
Če je pol lihe stopnje, funkcija pri prehodu čez pol spremeni predznak.

pol lihe stopnje



Če je pol sode stopnje, funkcija pri prehodu čez pol ne spremeni predznaka.

pol sode stopnje



3. Presečišče grafa racionalne funkcije z ordinatno osjo

Če je

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$q(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0$$

potem graf racionalne funkcije seka ordinatno os v $f(0)=\frac{p(0)}{q(0)}=\frac{a_0}{b_0}$, torej v točki $T\left(0,\frac{a_0}{b_0}\right)$.

4. Obnašanje racionalne funkcije daleč od koordinatnega izhodišča in njene asimptote

Racionalna funkcija se se daleč od izhodišča obnaša kot kvocient vodilnih členov:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}\xrightarrow{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Glede na stopnje polinomov p in q ločimo tri možnosti:

– *n* < *m*: stopnja polinoma v števcu je nižja od stopnje polinoma v imenovalcu.
Vrednost kvocienta $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ gre pri zelo velikih pozitivnih ali negativnih x proti nič. Graf racionalne funkcije se se daleč proč od izhodišča približuje vodoravni asimptoti y = 0.

– *n* = *m*: stopnji polinomov v števcu in imenovalcu sta enaki.
V kvocientu $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ lahko krajšamo x^n. Graf racionalne funkcije se daleč od izhodišča približuje vodoravni asimptoti $y = \frac{a_n}{b_m}$.

– *n* > *m*: stopnja polinoma v števcu je višja od stopnje polinoma v imenovalcu.
Ko se oddaljujemo od koordinatnega izhodišča, kvocient $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ raste prek vseh meja, zato gre tudi graf racionalne funkcije proti $\pm\infty$. V tem primeru lahko racionalno funkcijo zapišemo kot celi in ulomljeni del $f(x) = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$. Ker gre $\frac{r(x)}{q(x)}$ proti 0, se daleč proč od izhodišča funkcija bliža grafu polinoma *k* (*x*). Če je ta polinom linearna funkcija jo imenujemo poševna asimptota.

5. Ekstremi funkcije

Odvod količnika:

Funkcija:	Odvod:
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$	$f'(x) = \frac{p'(x)\cdot q(x) - p(x)\cdot q'(x)}{q^2(x)}$

Odvajaj:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$$

$$h(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2 + 2}$$

(D) Vaje

1. Nariši grafe racionalnih funkciji z upoštevanjem njihovih lastnosti (izračunaj ničle, pole, ekstreme, vodoravno asimptoto in začetno točko) ter določi definicijsko območje, zalogo vrednosti in intervale, na katerih je funkcija pozitivna:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4} \qquad g(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{-4x^2 + 4x - 1} \qquad h(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \qquad k(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 4x + 2}$$

2. Nariši graf funkcije $f(x) = \frac{(x-1)^2 (x+2)}{(x+1)^2 (x-2)}$ in $q(x) = |f(x)|$ ter za obe funkciji določi intervale naraščanja in padanja.

3. Dana je racionalna funkcija $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 1}$.
   a. Izračunaj ničle, pole, začetno točko, zapiši enačbo vodoravne asimptote ter nariši graf funkcije.
   b. Določi intervale naraščanja in padanja.
   c. V isti koordinatni sistem nariši premico $y = \frac{2}{3}x$, odčitaj koordinati presečišča ter rešitev preveri z računom.
   d. Reši neenačbo $f(x) < y$.