TRIGONOMETRIJA

KOTNE FUNKCIJE POLJUBNO VELIKEGA KOTA

(A) Merske enote

- stopinja [°]
- radian [rad]

$$1° = \frac{\pi}{180°}$$
$$180° = \pi$$
$$360° = 2\pi$$

1. Izrazi kot v radianih.

30° = 	90° =

45° = 	120° =

60° = 	270° =

2. Izrazi kot v stopinjah.

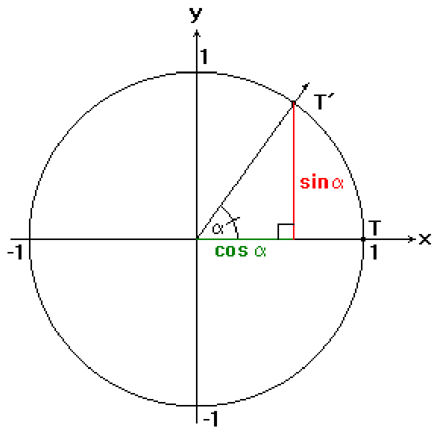
$\frac{3\pi}{4} =$ 	$\frac{\pi}{8} =$

$\frac{5\pi}{6} =$ 	$\frac{5\pi}{2} =$

(B) Definicija kotnih funkcij sinus in kosinus

Točko T (1, 0) zavrtimo za kot α okrog koordinatnega izhodišča v točko T´.

Vrednost funkcij sinus in kosinus definiramo kot:
- sin α je ordinata točke T´
- cos α je abscisa točke T´



$$\boxed{T´(x, y) = T´(\cos\alpha, \sin\alpha)}$$

Po Pitagorovem izreku velja: $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$.

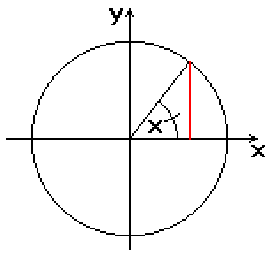
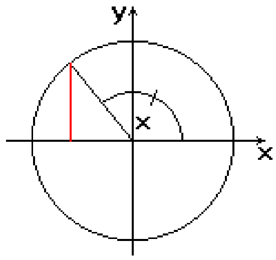
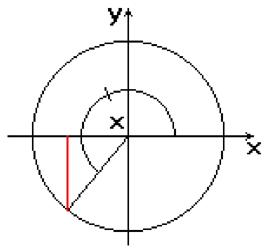
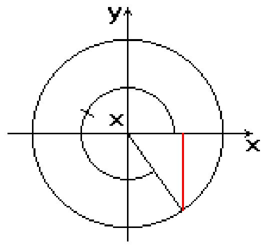
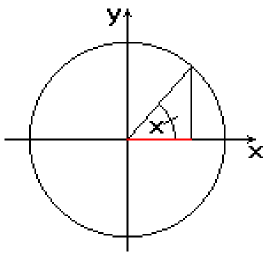
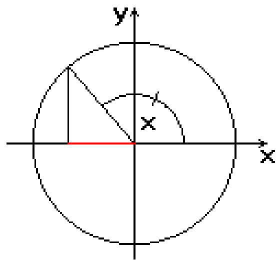
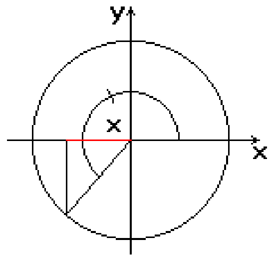
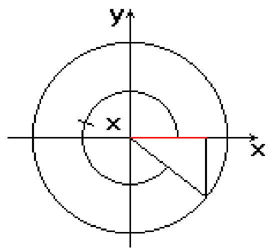
(C) Vrednosti kotnih funkcij za nekatere ostre kote

Pokaži izpeljavo.

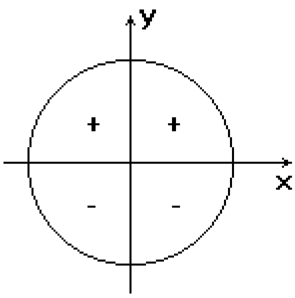
α [°]	0°	30°	45°	60°	90°
α [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ni def.
$\cot x$	ni def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

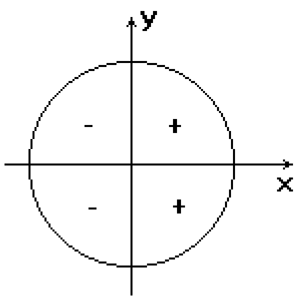
(D) Kotne funkcije kotov večjih od 90°

Ko spreminjamo velikost kota α, se spreminjajo vrednosti kotnih funkcij sinα in cosα:

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$
sin x	 narašča ___ → ___	 pada ___ → ___	 pada ___ → ___	 narašča ___ → ___
cos x	 pada ___ → ___	 pada ___ → ___	 narašča ___ → ___	 narašča ___ → ___

Predznak kotne funkcije: sin α cos α

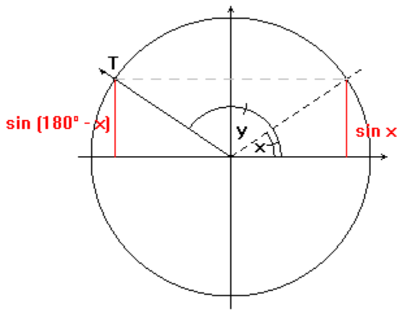
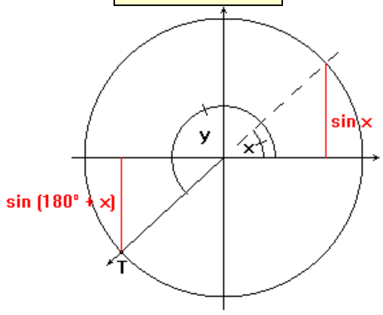
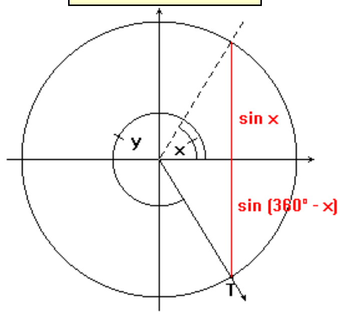
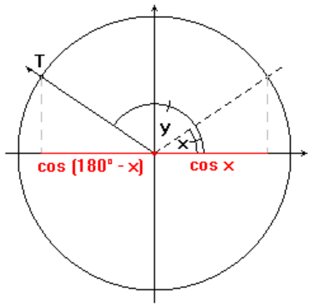
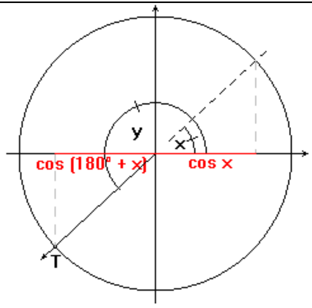
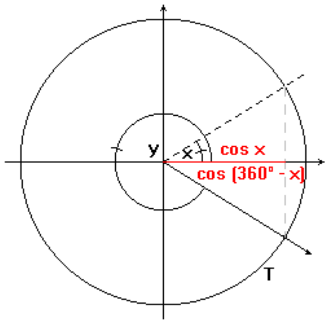




3. Izračunaj cos α, če je sin $\alpha = \frac{3}{5}$ in je $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4. Zapiši natančno vrednost sin α, če je $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ in $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{5}$.

Kotne funkcije kotov, večjih od $\frac{\pi}{2}$, lahko prevedemo na kotne funkcije ostrih kotov:

	$\frac{\pi}{2} < y < \pi$	$\pi < y < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$
sin y	$y = \pi - x$  $\sin(\pi - x) = \sin x$	$y = \pi + x$  $\sin(\pi + x) = -\sin x$	$y = 2\pi - x$  $\sin(2\pi - x) = -\sin x$
cos y	 $\cos(\pi - x) = -\cos x$	 $\cos(\pi + x) = -\cos x$	 $\cos(2\pi - x) = \cos x$

5. Izrazi z vrednostmi iste funkcije ostrega kota ter natančno izračunaj:

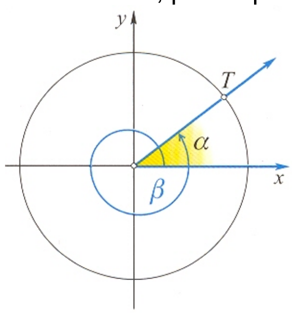
$\sin 150° =$ $\qquad$ $\sin\frac{3\pi}{4} =$

$\cos 120° =$ $\qquad$ $\sin\frac{7\pi}{4} =$

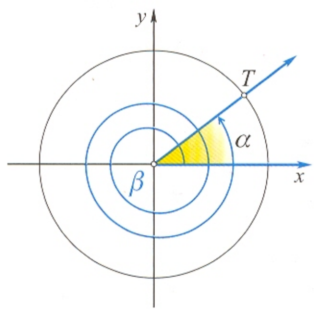
$\sin 300° =$ $\qquad$ $\cos\frac{7\pi}{6} =$

$\cos 330° =$

Če je kot β za kot α večji od kateregakoli večkratnika polnega kota $(\beta = \alpha + k2\pi;\ \ k \in Z)$, se bo premični krak tega kota *k* – krat zavrtel okoli izhodišča, potem pa opisal še kot α.



$\beta = 2\pi + \alpha$



$\beta = 4\pi + \alpha$

Vrednost funkcije sinus in kosinus se ne spremeni, če vrednosti kota prištejemo večkratnik kota 2π:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha;\ \ k \in Z$$

Zato pravimo, da sta sinus in kosinus <u>periodični funkciji</u> z <u>osnovno periodo 2π</u>.

6. Izrazi z vrednostmi iste kotne funkcije ostrega kota.

$\sin 850° =$

$\cos 1225° =$

$\cos 395°8' =$

$\sin 423°47' =$

$\cos \frac{31\pi}{6} =$

$\sin \frac{17\pi}{6} =$

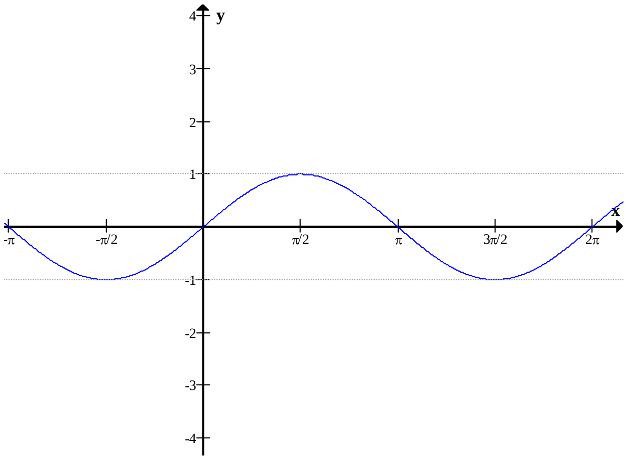
GRAFA IN LASTNOSTI FUNKCIJ SINUS IN KOSINUS

(A) Funkcija sinus

Definicija: Funkcijo sinus smo definirali kot ordinato točke T´, v katero se točka T (1, 0) zasuka po vrtenju za kot α. Definirana je na množici realnih števil, zaloga vrednosti pa je interval [-1, 1].

$$f : IR \to [-1,1]$$
$$f : x \mapsto \sin x$$

Graf funkcije sinus:



Krivulji take oblike pravimo sinusoida.

Lastnosti funkcije sinus:

- ničle ima pri: $x_0 = k\pi; \quad k \in Z$
- maksimum y = 1 doseže pri
  $$x_{\max} = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \quad k \in Z$$
- minimum y = - 1 doseže pri
  $$x_{\min} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; \quad k \in Z$$
- je periodična z osnovno periodo 2π
- je liha, saj je $\sin(-x) = -\sin x$ za vsak x
- je omejena, spodnja meja je -1, zgornja meja je 1

1. Nariši funkcije:
   $f(x) = 1 - \sin x$
   $g(x) = |\sin x|$
   Zapiši najmanjšo in največjo vrednost, ki jo zavzamejo dane funkcije.

2. Za katere vrednosti *x* ima funkcija $f(x) = \sin x$ vrednost $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

3. Dana je funkcija $f(x) = \sin x + 1$.

   a. Na intervalu $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ nariši graf funkcije *f*.

   b. Zapiši ničle ter njeno zalogo vrednosti.
   c. Na katerem intervalu je funkcija naraščajoča?

   d. Poišči presečišča z grafom funkcije $g(x) = \frac{3}{2}$.

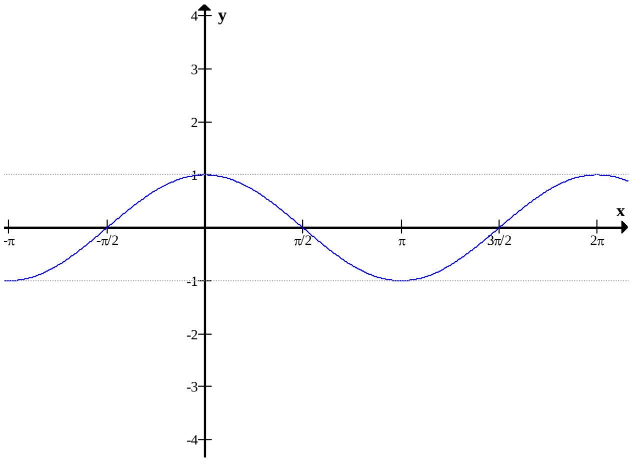
(B) Funkcija kosinus

Definicija: Funkcijo kosinus smo definirali kot absciso točke T´, v katero se točka T (1, 0) zasuka po vrtenju za kot α. Definirana je na množici realnih števil, zaloga vrednosti pa je interval [-1, 1].

$$f : IR \to [-1,1]$$
$$f : x \mapsto \cos x$$

Graf funkcije kosinus:

Graf funkcije kosinus ima enako obliko kot graf funkcije sinus, le da je premaknjen za $\frac{\pi}{2}$ v levo.



Lastnosti funkcije kosinus:

- ničle ima pri: $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in Z$
- maksimum y = 1 doseže pri
  $x_{\max} = 2k\pi; \quad k \in Z$
- minimum y = - 1 doseže pri
  $x_{\min} = \pi + k2\pi; \quad k \in Z$
- je periodična z osnovno periodo 2π
- je soda, saj je $\cos(-x) = \cos x$ za vsak x
- je omejena, spodnja meja je -1, zgornja meja je 1

1. Nariši graf funkcije.
   $f(x) = \cos x + 1$
   $g(x) = |\cos x|$
   Zapiši ničle, periodo in zalogo vrednosti danih funkcij.

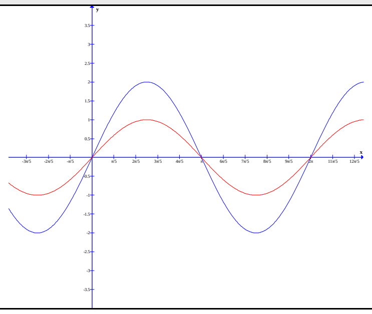
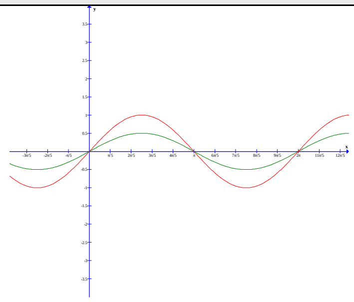
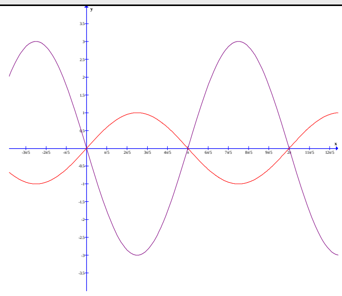
2. Reši enačbe.
   $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos x = -\frac{1}{2}$

3. Dana je funkcija $f(x) = \cos x - 1$.
   a. Na intervalu $[-\pi, 2\pi]$ nariši graf funkcije *f*.
   b. Zapiši abscise maksimumov in minimumov funkcije *f* in njene ničle.
   c. Na katerem intervalu je funkcija padajoča?
   d. Poišči presečišča z grafom funkcije $g(x) = -\frac{1}{2}$.

GRAFI FUNKCIJ OBLIKE *g(x) = A* sin *ωx* in *g(x) = A* cos *ωx*

(A) *g(x) = A* sin *x* in *g(x) = A* cos *x*

Zgled $g(x) = A\sin x$:

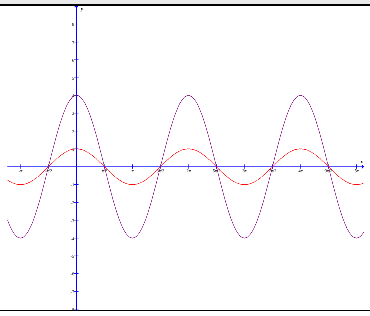
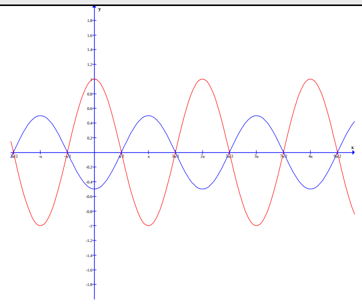
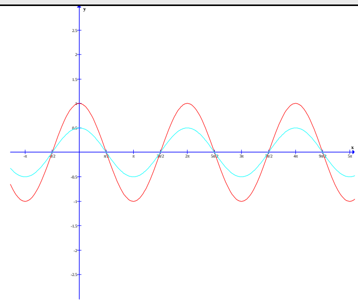
$g(x) = 2\sin x;\ A = 2$	$h(x) = \frac{1}{2}\sin x;\ A = \frac{1}{2}$	$k(x) = -3\sin x;\ A = -3$
		
$Z_g = [-2,2]$ razteg v smeri ordinatne osi	$Z_h = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ skrčitev v smeri ordinatne osi	$Z_k = [-3,3]$ razteg v smeri ordinatne osi in zrcaljenje čez abscisno os

Graf funkcije $g(x) = A\sin x$ dobimo tako, da osnovni graf $f(x) = \sin x$:

- raztegnemo vzdolž ordinatne osi, če je *A* > 1
- skrčimo vzdolž ordinatne osi, če je 0 < *A* < 1
- skrčimo vzdolž ordinatne osi in zrcalimo čez abscisno os, če je -1 < *A* < 0
- raztegnemo vzdolž ordinatne osi in zrcalimo čez abscisno os, če je *A* < -1

Število *A* imenujem <u>amplituda</u>.

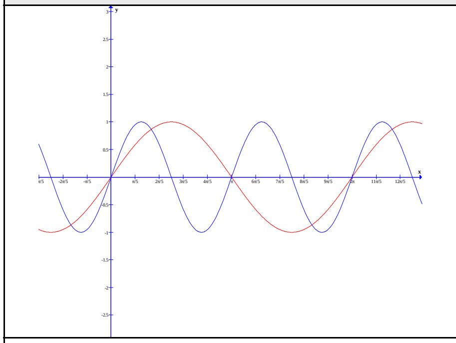
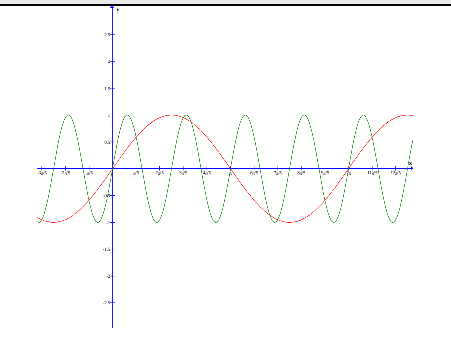
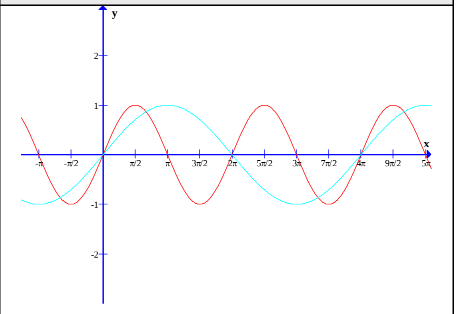
Enako velja tudi za funkcijo $g(x) = A\cos x$.

$g(x) = 4\cos x;\ A = 4$	$h(x) = -\frac{1}{2}\cos x;\ A = -\frac{1}{2}$	$k(x) = \frac{1}{2}\cos x;\ A = \frac{1}{2}$
		
$Z_g = [-4,4]$ razteg v smeri ordinatne osi	$Z_h = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ skrčitev v smeri ordinatne osi in zrcaljenje čez abscisno os	$Z_k = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ skrčitev v smeri ordinatne osi

1. Dana je funkcija $f(x) = 2\cos x$.
   a. Nariši njen graf.
   b. Zapiši ničle, minimume in maksimume funkcije.
   c. Zapiši zalogo vrednosti funkcije.
   d. V isti koordinatni sistem nariši še graf funkcije $g: x \mapsto |f(x)|$ ter določi periodo in zalogo vrednosti.

(B) *g(x)* = sin *ωx* in *g(x)* = cos *ωx*

Zgled $g(x)=\sin\omega x$:

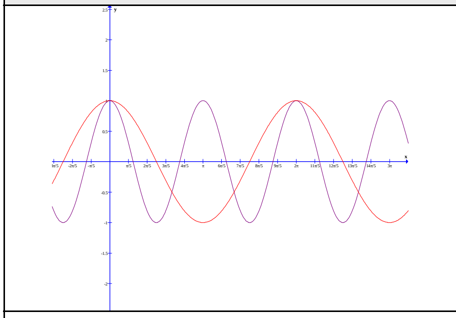
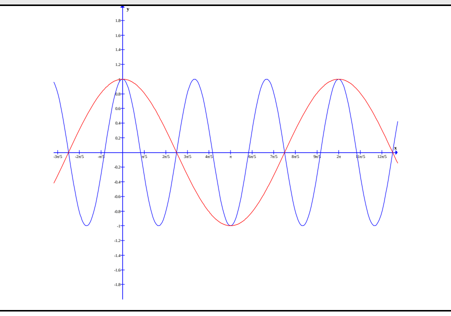
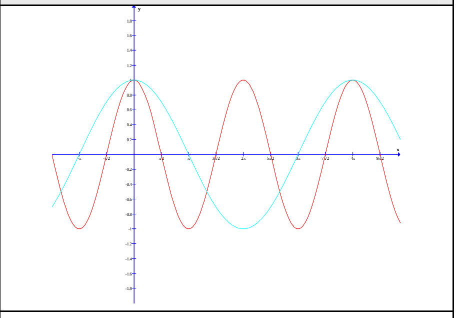
$g(x)=\sin 2x$; $\omega=2$	$h(x)=\sin 4x$; $\omega=4$	$k(x)=\sin\frac{x}{2}$; $\omega=\frac{1}{2}$
		
skrčitev v smeri abscisne osi za faktor 2 perioda je π	skrčitev v smeri abscisne osi za faktor 4 perioda je $\frac{\pi}{2}$	razteg v smeri abscisne osi za faktor ½ perioda je 4π

V splošnem velja:

- če je ω > 1, gre pri funkciji *g(x)* = sin *ωx* za skrčitev osnovne funkcije sin *x* vzdolž abscisne osi,
- če je 0 < ω < 1, gre pri funkciji *g(x)* = sin *ωx* za razteg vzdolž abscisne osi.

Število ω imenujemo frekvenca. Perioda funkcije *g(x)* = sin *ωx* je $\frac{2\pi}{\omega}$.

Enako velja tudi za funkcijo $g(x)=\cos\omega x$.

$g(x)=\cos 2x$; $\omega=2$	$h(x)=\cos 3x$; $\omega=3$	$k(x)=\cos\frac{x}{2}$; $\omega=\frac{1}{2}$
		
skrčitev v smeri abscisne osi za faktor 2 perioda je π	skrčitev v smeri abscisne osi za faktor 3 perioda je $\frac{2\pi}{3}$	razteg v smeri abscisne osi za faktor ½ perioda je 4π

2. Zapiši osnovno periodo in amplitudo danih funkcij.

   $\sin 2x$ $\qquad 2\cos 3x$ $\qquad 2\sin\frac{x}{2}$ $\qquad \pi\cos 4x$

3. Zapiši ničle in abscise minimumov in maksimumov danih funkcij.

   $\cos\frac{x}{2}$ $\qquad \sin 4x$

4. Dana je funkcija $f : x \mapsto 3\cos\frac{x}{2}$.
   a. Zapiši ničle, abscise minimumov in maksimumov funkcije *f*.
   b. Nariši graf funkcije *f*.
   c. Na katerem intervalu je funkcija padajoča?
   d. V isti koordinatni sistem nariši še graf funkcije $g : x \mapsto |f(x)|$.

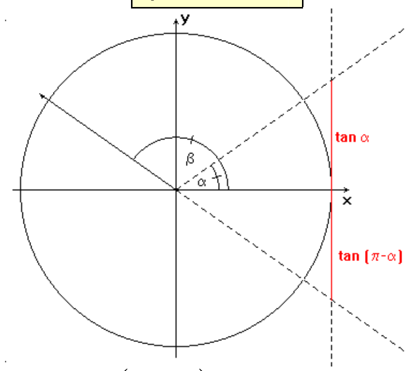
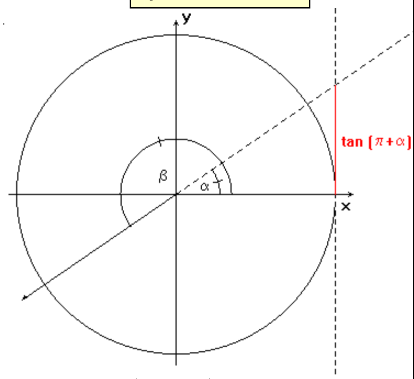
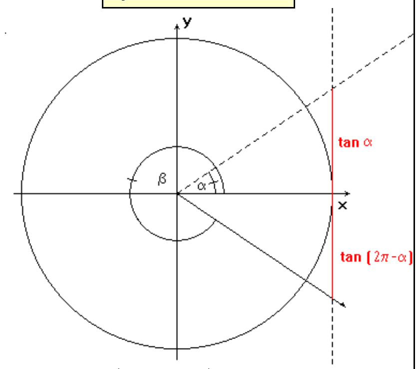
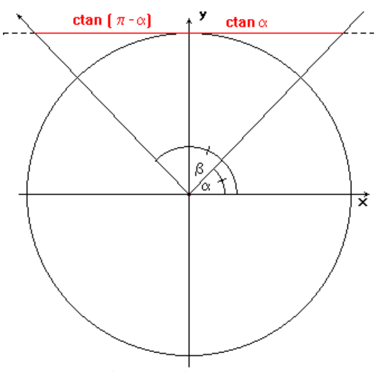
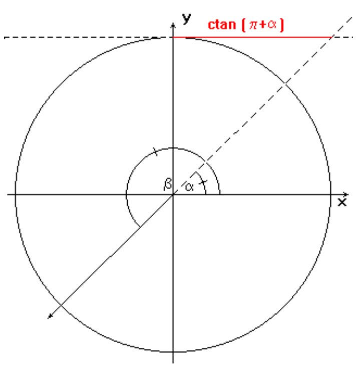
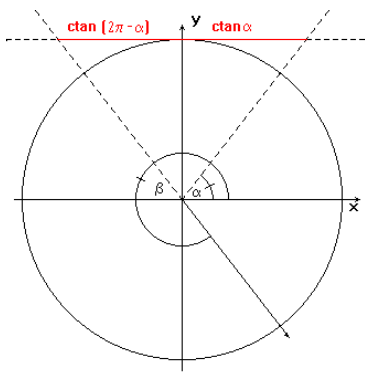
5. V istem koordinatnem sistemu nariši grafa funkcij $f, g : [-2\pi, 2\pi] \to IR$; $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + 1$ in $g(x) = 1$. Na katerem intervalu je $f(x) < g(x)$?

6. Nariši graf funkcije $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkciji tangens in kotangens

(A) Kotne funkcije kotov večjih od 90°

Kotne funkcije kotov, večjih od $\frac{\pi}{2}$, lahko prevedemo na kotne funkcije ostrih kotov:

	$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$	$\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$
$\tan\beta$	$\boxed{\beta = \pi - \alpha}$  $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$	$\boxed{\beta = \pi + \alpha}$  $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$	$\boxed{\beta = 2\pi - \alpha}$  $\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot\beta$	 $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$	 $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$	 $\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

1. Izrazi z vrednostmi iste kotne funkcije ostrega kota ter natančno izračunaj.

$\tan 150° =$ $\qquad$ $\tan\frac{3\pi}{4} =$

$\tan 300° =$ $\qquad$ $\cot\frac{7\pi}{4} =$

$\cot 120° =$ $\qquad$ $\cot\frac{7\pi}{6} =$

$\cot 330° =$

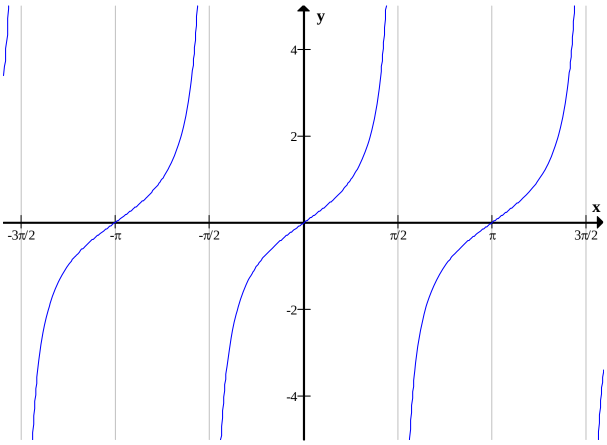
(B) Funkcija tangens

Definicija: Funkcija tangens je kvocient funkcij sinus in kosinus: $\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$.

Definirana je povsod razen v ničlah imenovalca: $D_f = IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z\right\}$, zaloga vrednosti pa so vsa realna števila.

V točkah, kjer ni definirana ima funkcija pole (navpične asimptote).
Ničle funkcije tangens so ničle števca: $\{k\pi;\ k \in Z\}$.

Graf funkcije tangens:



Lastnosti funkcije tangens:

- je periodična s periodo π:
  $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$
- je odsekoma zvezna funkcija
- je liha funkcija:
  $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$
- je odsekoma naraščajoča funkcija
- ni omejena
- zaloga vrednosti je množica realnih števil

2. Dana je funkcija $f(x) = \tan x - 1$.

   a. Natančno izračunaj $f\left(\frac{11\pi}{4}\right)$.

   b. Zapiši ničle in pole funkcije ter nariši njen graf.

3. V istem koordinatnem sistemu nariši graf funkcije $f:[-\pi,\pi] \to IR$; $f: x \mapsto \tan x$ in premice $y = -1$ ter zapiši koordinate presečišč.

4. V istem koordinatnem sistemu nariši grafa funkcij $f, g:[-\pi,\pi] \to IR$; $f: x \mapsto \tan x$ in $g(x) = \sqrt{3}$ ter zapiši njuna presečišča. Na katerih intervalih je $f(x) > g(x)$?

5. Natančno izračunaj.

$$\frac{\cos 150° + \tan 240°}{\tan 315° + \sin 30°} =$$

$$\frac{\tan\frac{5\pi}{3} - \tan\frac{7\pi}{3}}{2\sin\frac{7\pi}{2}} =$$

$$\frac{\sin 420° \cos 315°}{\tan 585°} =$$

(C) Funkcija kotangens

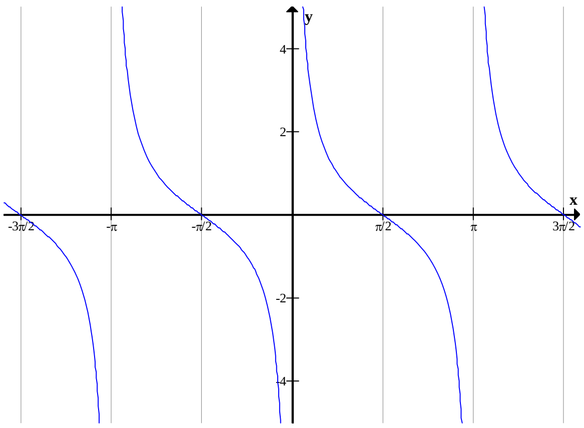
Definicija: Funkcija kotangens je kvocient funkcij kosinus in sinus: $\boxed{\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x} = \tan^{-1} x}$.

Definirana je povsod razen v ničlah imenovalca: $D_f = IR - \{k\pi;\ k \in Z\}$, zaloga vrednosti pa so vsa realna števila.

V točkah, kjer ni definirana ima funkcija pole (navpične asimptote).

Ničle funkcije kotangens so ničle števca: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z\right\}$.

Graf funkcije kotangens:



Lastnosti funkcije kotangens:

- je periodična s periodo π:

  $\cot(x+\pi) = \dfrac{1}{\tan(x+\pi)} = \dfrac{1}{\tan x} = \cot x$
- je odsekoma zvezna funkcija
- je liha funkcija:

  $\cot(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$
- je odsekoma padajoča funkcija
- ni omejena
- zaloga vrednosti je množica realnih števil

6. V istem koordinatnem sistemu nariši grafa funkcij $f, g : [-\pi, \pi] \to IR$; $f : x \mapsto \cot x$ in $g(x) = \cos x$ ter zapiši nuna presečišča. Na katerem intervalu je $f(x) > g(x)$?

(D) Zveze med kotnimi funkcijami

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

7. Poenostavi.

$\cos x(1 + \tan^2 x) =$ $\qquad \tan^2 x - \dfrac{1}{1 - \sin^2 x} =$ $\qquad \cos^2 x(1 - \tan^2 x) =$

$\dfrac{\sin x + \cos x \tan x}{\tan x} =$ $\qquad \dfrac{\cos x \tan x}{\sin x - \sin^2 x} =$ $\qquad \tan x - \dfrac{\tan x}{1 + \tan^2 x} =$

8. Izračunaj $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$, če je kot α oster in $\tan\alpha = 2$.

9. Izračunaj $\tan\alpha$, če je α top in $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

10. Izračunaj $\tan\alpha$, če je α oster in $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

ADICIJSKI IZREKI

(A) Adicijski izreki za sinus kotov

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

(B) Adicijski izreki za kosinus kotov

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

(C) Adicijski izreki za tangens kotov

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(D) Vaje

1. Izračunaj $\cos(x+y)$, če je $\sin x=\frac{3}{4}$ in $\cos y=-\frac{1}{3}$ ter je $\frac{\pi}{2}\le x,y\le\pi$.

2. Izračunaj $\sin 15°$.

3. Izračunaj $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ in $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, če je $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

(E) Kotne funkcije dvojnih kotov

Sinus dvojnega kota: $\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$

Kosinus dvojnega kota: $\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

Tangens dvojnega kota: $\boxed{\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

4. Izračunaj $\tan 2\alpha$, če je α oster in $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

5. Izračunaj $\tan 2\alpha$, če je kot α top in $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

6. Izračunaj $\sin 2\alpha$ in $\cos 2\alpha$, če je $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ in $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

TRIGONOMETRIČNE ENAČBE

(A) Definicija

V trigonometričnih enačbah nastopajo neznanke v argumentih kotnih funkcij. Rešitev trigonometrične enačbe je družina kotov, saj vedno upoštevamo periodičnost trigonometričnih funkcij.

(B) Reševanje osnovnih trigonometričnih enačb

a. $\boxed{\sin x = a}$

Enačba ima rešitev le v primeru, da je $|a| \leq 1$.

Za $0 < |a| < 1$ ima enačba rešitve: $\boxed{x_1 = \arcsin a + 2k\pi, \quad x_2 = \pi - \arcsin a + 2k\pi, \quad k \in Z}$

Za $a = 1$ so rešitve enačbe: $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z}$

Za $a = -1$ so rešitve enačbe: $\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z}$

Za $a = 0$ ima enačba rešitve: $\boxed{x = k\pi, \quad k \in Z}$

b. $\boxed{\cos x = a}$

Enačba ima rešitev le v primeru, da je $|a| \leq 1$.

Za $-1 \leq a \leq 1$ ima enačba rešitve: $\boxed{x_{1,2} = \pm \arccos x + 2k\pi, \quad k \in Z}$

c. $\boxed{\tan x = a}$

Vse rešitve enačbe so: $\boxed{x = \arctan x + k\pi, \quad k \in Z}$

d. $\boxed{\cot x = a}$

Reševanje te enačbe navadno prevedemo na reševanje enačbe $\tan x = a^{-1}$ pri pogoju, da je $a \neq 0$.

(C) Vaje

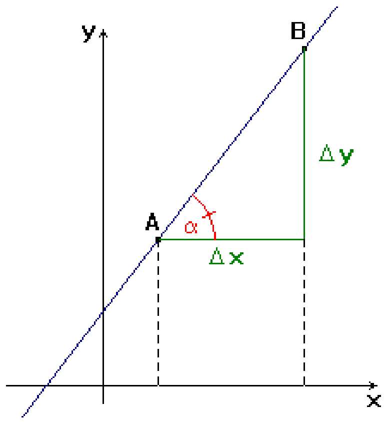
$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 x - \frac{1}{4} = 0$

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\tan x = -\sqrt{3}$ $\qquad$ $\cos 2x - 7\cos x + 4 = 0$

NAKLONSKI KOT PREMICE IN KOT MED DVEMA PREMICAMA

(A) Naklonski kot premice



Vsako enačbo premice, ki ni vzporedna ordinatni osi, lahko zapišemo v eksplicitni obliki:

$$y = kx + n\,; \qquad k, n \in IR$$

Smerni koeficient *k* odloča o naklonskem kotu premice in je enak diferenčnemu kvocientu:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

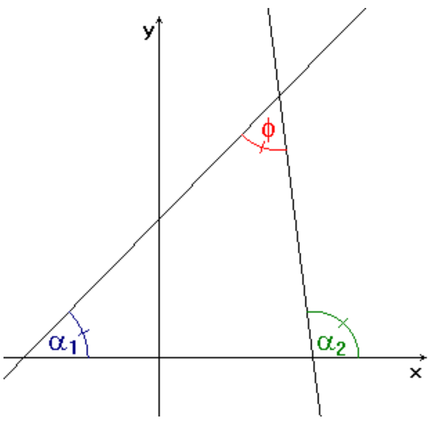
Diferenčnemu kvocientu je enak tudi tangens naklonskega kota α:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Iz enakosti lahko sklepamo, da je smerni koeficient enak tangensu naklonskega kota α:

$$\boxed{k = \tan\alpha}$$

(B) Kot med premicama



Naklonski kot prve premice je α_1, zato velja $\tan\alpha_1 = k_1$, naklonski kot druge premice je α_2, zato velja $\tan\alpha_2 = k_2$.

Ker je zunanji kot v trikotniku enak vsoti notranjih nepriležnih kotov, velja med koti α_1, α_2 in ϕ zveza:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \phi \quad \rightarrow \quad \phi = \alpha_2 - \alpha_1$$

Če uporabimo adicijski izrek za tangens razlike kotov, dobimo:

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Po dogovoru iščemo ostri kot med premicama, zato velja:

$$\boxed{\tan\phi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|}$$

Vzporedni premici imata enak smerni koeficient: $k_1 = k_2$, če pa sta premici pravokotni, sta njuna smerna koeficienta obratni in nasprotni števili: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

(C) Vaje

1. Poišči naklonski kot danih premic.

   $y = \frac{1}{2}x - 3$

   $y = 3$

   $x + y - 4 = 0$

2. Izračunaj kote med premicama.

   $y = 2x - 1, \;\; y = 4x + 2$

   $y = -x, \;\; y = \frac{5}{2}x + 3$

   $y = 2, \;\; y = -2x + 1$

3. Kolikšen kot oklepa premica $y = \frac{2}{3}x + 1$ z ordinatno osjo?

4. Določi naklonski kot premice, ki poteka skozi točki *A* (1, -2) in *B* (2, 4).

5. Dana je premica $y = x + 5$. Zapiši eksplicitno enačbo premice, ki poteka skozi točko *T* (-2, 5) in je:
   a. pravokotna na dano premico,
   b. vzporedna na dano premico.

6. Zapiši enačbo simetrale daljice s krajiščema *A* (-3,6) in *B* (2,-4).