OSNOVNI POJMI VERJETNOSTNEGA RAČUNA

Osnovna <u>pojma :</u> POSKUS, DOGODEK

<u>POSKUS :</u> vsak akt,
hote ali nehote opravljeno dejanje
realizacija množice skupaj nastopajočih dejstev
(met kocke,rojstvo otroka,testiranje izdelka za kontrolo, ...)

<u>DOGODEK :</u> določeno dejstvo, ki se pri poskusu lahko zgodi ali pa ne zgodi
(pade ena pika,rojen otrok je deklica,izdelek je uporaben , ...)

<u>Označimo :</u>
POSKUSI : α ,β, Υ...
DOGODKI : A, B, C, X,...

Dan poskus α in dogodek A !

poskus ponavljamo in štejemo kolikokrat se zgodi dogodek A
mogoče troje :

dogodek A se zgodi <u>vedno ..... gotov dogodek</u>
dogodek A se ne zgodi <u>nikoli.....nemogoč dogodek</u>
dogodek A se <u>včasih</u> zgodi, <u>včasih</u> pa se ne zgodi
<u>.....slučajen dododek</u>

<u>RELACIJE IN OPERACIJE</u> med dogodki -<u>algebra dogodkov</u>

$A \subset B$ A način B
hkrati z A se zgodi B

<u>velja</u> :
$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (tranzitivnost)

$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ <u>ekvivalentna</u> sta dogodka,ki se zgodita vedno hkrati

<u>Seštevanje dogodkov (+)</u>

A, B dva dogodka
A, B $\xrightarrow{+}$ A + B
<u>definicija :</u>

vsota dogodkov A in B je dogodek,ki se zgodi, če se
pri zgodi vsaj eden od obeh dogodkov vsota

dogodka : A ... izbrana karta pik, B ... izbrana karta as
A + B ... izbrana karta pik ali as(lahko tudi pikov as)

posplošitev : $A_1 + A_2 + \ldots A_n$ **je dogodek, da se zgodi vsaj eden od** A_i

Lastnosti

A + B = B + A (komutativnost)

(A + B) + C = A + (B + C) (asociativnost)

Množenje dogodkov (. , x)

A, B dana dogodka

A, B $\xrightarrow{.,X}$ **A.B**

definicija :

produkt dveh dogodkov je dogodek,ki se zgodi, če se

primer : α **poskus : izbor karte iz kupa 32 igralnih kart**

dogodka : A ... izbrana karta pik , B ... izbrana karta as

produkt A•B ....izbrana karta pikov as

posplošitev :

$A_1 . A_2 . \ldots . A_n$ **je dogodek, ki se zgodi, če se zgodijo vsi dogodki v produktu hkrati**

lastnosti :

A.B = B.A (komutativnost)

A.(B.C) = (A.B).C (asociativnost)

(A+B).C = A.C + B.C (distributivnost)

nasprotni dogodek :

dogodku A nasprotni dogodek (tudi negacija dogodka A)
je dogodek, ki se zgodi, če se A ne zgodi in se ne

lastnosti :

$\overline{\overline{A}} = A$, $A.\overline{A} = N$, $A + \overline{A} = G$, $\overline{N} = G$, $\overline{G} = N$

De Morganova zakona :

$$\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$$

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

posplošitev :

$$\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}\ldots$$

$$\overline{A.B.C\ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots$$

nezdružljiva sta dogodka A in B, če se ne moreta zgoditi

A.B = N velja za nezdružljiva dogodka

združljiva sta dogodka A in B, če se lahko zgodita

sestavljen dogodek :

je dogodek A, če ga moremo pisati kot vsoto

A = B + C

primer :

rdeča karta = srce + kara

as = pik as + srce as + kri` as + karo as

izid ali elementarni dogodek

je dogodek,ki ga ni možno pisati kot vsoto

Popoln sistem dogodkov

pri večkratni ponovitvi poskusa α se lahko zgodijo dogodki :

$$A_1, A_2, \ldots A_n.$$

definicija :

Množica dogodkov $S = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ **je popoln sistem, če se pri vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko eden izmed njih**

Iz te de

1. **dogodki v S so paroma nezdružljivi**

$$A_i . A_j = N, \quad \forall i \neq j$$

2. **vsota dogodkov iz S je gotov dogodek G**

$$A_1 + A_2 + \ldots A_n = G$$

<u>definicija:</u>
ponovitev poskusa α je za dogodek A <u>u g o d n a</u> , če zgodi dogodek A pri tej ponovitvi.

n : število ponovitev α
m : število ugodnih ponovitev

$$f(A) = \frac{m}{n}$$

dogodka A **<u>r e l a t i v n a frekvenca</u>**

Kaj o dogodku pove relativna frekvenca ?

- **če je f(A) ≈ 1 pravimo da je dogodek A zelo verjeten**
- **če je f(A) ≈ 0 pravimo da je dogodek A malo verjeten**
- **če je f(A) > f(B) pravimo da je A bolj verjeten kot B**
- **če je f(A) = f(B) pravimo da sta dogodka A in B enakoverjetna**

Zaključimo : **<u>VERJETNOST</u> je količina, ki se da**

Velja : z večanjem n (ponovitev poskusa) se relativna frekvenca <u>stabilizira,</u> zato definiramo (statistična definicija) :

<u>VERJETNOST DOGODKA</u> A je število,pri katerem se njegova relativna frekvenca stabilizira,ko ...

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

<u>pomni :</u>
- **verjetnost dogodka se vedno nanaša na čisto določen poskus**
- **verjetnost je odvisna od razmer v poskusu in ne od volje tistega, ki poskus izvaja**
- **pri ponovitvah istega poskusa se pogoji (kompleks pogojev) ne spreminjajo**

<u>Klasična definicija VERJETNOSTI dogodka A</u>
A : sestavljen dogodek iz m dogodkov popolnega sistema <u>izidov</u>

$$S = \{A_1, A_2, \ldots A_n\} \qquad m < n$$

$$A = A_{i1} + A_{i2} + \ldots + A_{im}$$

definiramo <u>v e r j e t n o s t dogodka</u> A :

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

<u>sledi</u> : izidi v popolnem sistemu so <u>enakoverjetni</u> ! (zakaj ?)
<u>Lastnosti verjetnosti :</u>

1. **P(A) ≥ 0**
2. **P(G) = 1 in P(N) = 0**
3. **P(A+B) = P(A) + P(B) za A,B nezdružljiva**

<u>Izrek:</u>
Verjetnost slučajnega dogodka je : 0 ≤ P(A) ≤ 1

<u>P O G O J N A V E R J E T N O S T</u>

Dana sta dva dogodka A in B in njuni verjetnosti :
P(A) in P(B) !
Merimo nastope enega dogodka glede na nastope drugega dogodka !
Vzemimo ,
da se je B zgodil in ima nato A neko verjetnost - tej verjetnosti pravimo <u>p o g o j n a verjetnost</u> dogodka A pri pogoju B
<u>Pišemo :</u>
P(A/B)
<u>Podobno :</u>
P(B/A)
<u>Izrek:</u>
Veljata zvezi :

$$\boxed{P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A.B)}{P(B)} \quad \text{in} \quad P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A.B)}{P(A)}}$$

<u>definicija :</u>
dogodka A in B sta med seboj <u>neodvisna</u>, kadar velja :
P(A/B) = P(A) in P(B/A) = P(B)
<u>Izrek :</u>
Za neodvisna dogodka velja : P(A.B) = P(A).P(B)

VAJE IZ KOMBINATORIKE

1. Iz posode, v kateri so 3 bele in 4 črne krogle, izberemo 3 krogle. Koliko je izborov z vsaj eno belo kroglo? (31)

2. V škatli so bele, črne in rdeče kroglice. Na koliko načinov lahko izvlečemo hkrati 5 kroglic, če izvlečeno kroglico vsakič spet vrnemo v škatlo? (21)

3. V ravnini je 7 premic, med njimi 4 vzporednice. Koliko presečišč največ določajo? (15)

4. Na sprejemu je bilo 15 medsebojnih predstavitev. Koliko ljudi se je srečalo? (6)

5. Koliko tetiv je določenih z 10 (n) točkami krožnice? (45, posploši)

6. Na koliko načinov lahko razporedimo za ravno mizo 5 moških in 2 ženski, če naj ti dve ne sedita skupaj? (3600)

7. Na koliko načinov lahko za okroglo mizo sedi 6 oseb? (120)

8. Koliko je permutacij besede BARBARA ? (210)

9. Na koliko načinov lahko sede v vrsti 3 moški in 4 ženske, če
   a) ni omejitev, (5040)
   b) naj sede moški skupaj in ženske skupaj, (288)
   c) morajo sedeti le moški skupaj, (720)
   č) morajo sedeti ženske na lihih mestih? (144)

10. Na koliko načinov je mogoče vreči tri igralne kocke različnih barv? Koliko je metov, ki pokažejo različno število pik na posameznih kockah? (216, 120)

11. Pri katerem številu elementov je število variacij brez ponavljanja 4. reda dvakratnik števila variacij brez ponavljanja 3. reda (2. reda)? (5 (4))

12. Koliko štirimestnih številk lahko zapišemo s števkami 3, 4 in 5? Koliko številk se začne s števko 5? (81, 27)

13. Koliko števil, večjih od 3000 in manjših od 5000 lahko sestaviš s sedmimi števkami 0, 1, 2, 3, 4, 5 in 6, če se števke lahko ponavljajo ? (685)