

NASTOP:

DOLOČENI INTEGRAL

VAJE

Motivacija:

- Splošna uporaba integralov se uvidi šele, ko spoznamo določene integrale, s temi pa lahko računamo dolžine, površine volumne,... najrazličnejših krivulj, likov, teles, ...
- Tako bomo danes pogledali še nekaj primerov kjer uporabljamo določene integrale

Tabela nedoločenih integralov elementarnih funkcij:

$$\int dx = x + C$$
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{R}; n \neq -1$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

Pravila za integriranje:

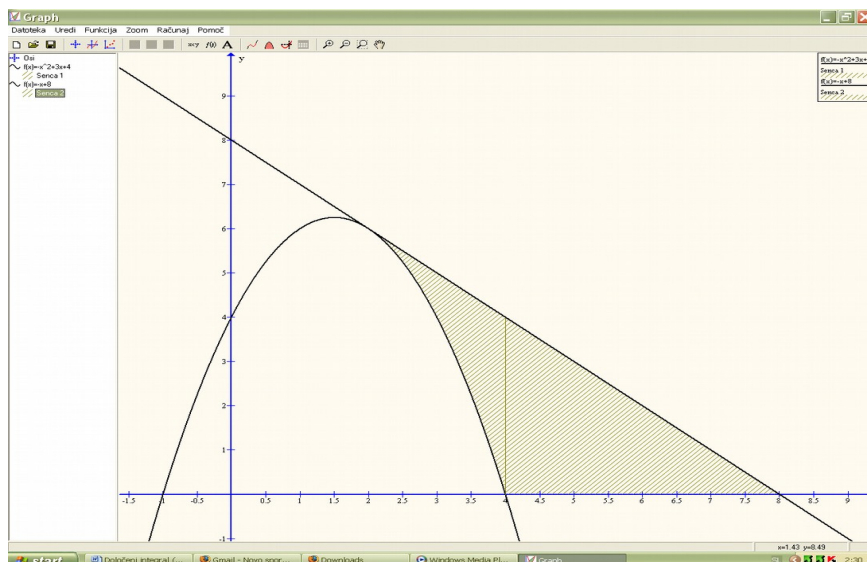
- Integral vsote dveh funkcij je enak vsoti integralov posameznih funkcij:
$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$
- Konstantni faktor pred funkcijo, ki jo integriramo, lahko pišemo pred integralski znak:
$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Primeri: na delovnem listu.

Domača naloga : kar je ostalo na delovnem listu

REŠITVE: 1) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo:

- abscisna os
- $f(x) = -x^2 + 3x + 4$
- tangenta na $f(x)$ v točki $T(2, y)$



Ekstrem: $f'(x) = -2x + 3 \Rightarrow \max$ je v $x = 3/2$

Ničli:

$$-x^2 + 3x + 4 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 4; x_2 = -1$$

$$\frac{a \cdot v_a}{2} - \int_2^4 f(x) dx = 18 - 7 \frac{1}{3} = 10 \frac{2}{3}$$

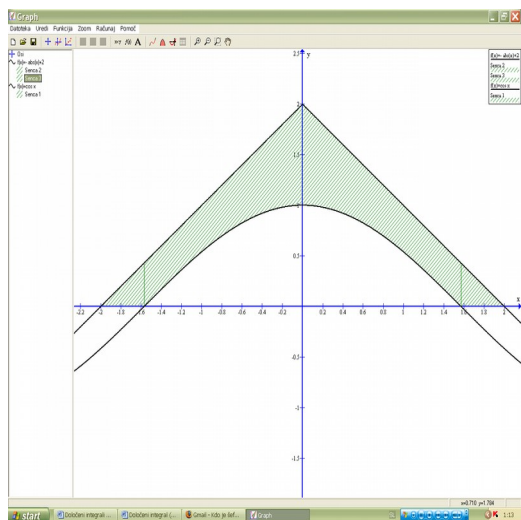
$f'(2) = -1 = k$ & $T(2,6) \Rightarrow$ tangenta: $t(x) = -x + 8 \Rightarrow$ meje od 2 do 8

2) Določi ploščino lika med funkcijama nad abscisno osjo:

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = -|x| + 2$$

[R:2]



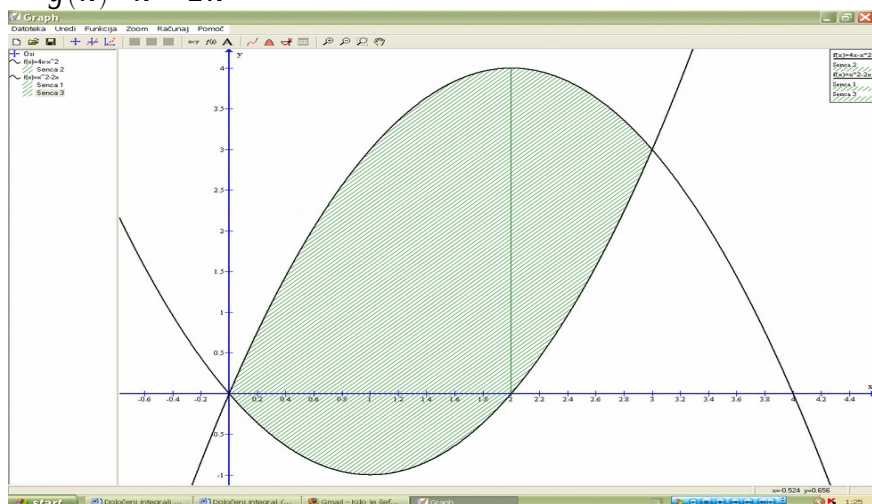
Sodi funkciji \Rightarrow simetrija. S dva pomnožimo na intervalu $[0,2]$ odštejemo ...
Ali pa trikotniku odštejemo kosinus na celim intervalu.

3) Izračunaj presek parabol :

$$f(x) = 4x - x^2$$

$$g(x) = x^2 - 2x$$

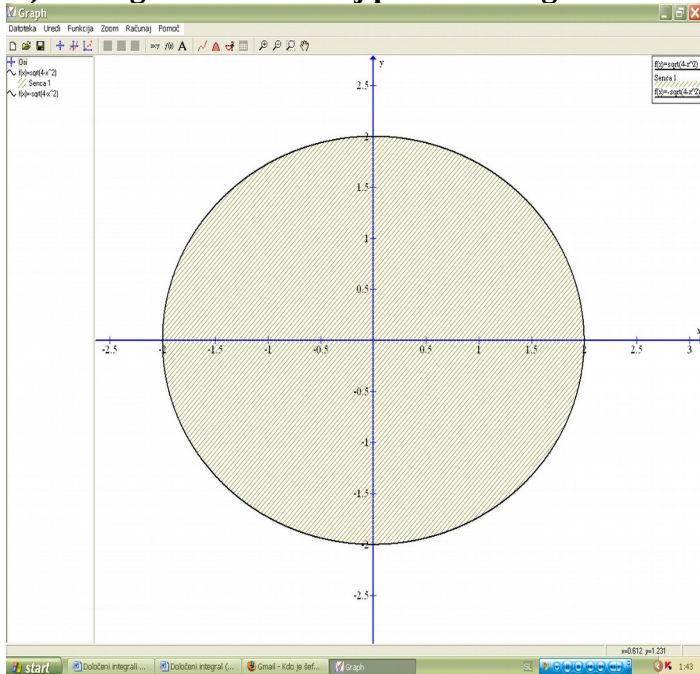
[R:9]



Z lahkoto.....

4) Z integralom izračunaj ploščino kroga z enačbo krožnice : $x^2 + y^2 = 4$

[R: 4π]



$$S = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

novaspremenljivka :

$$x = 2 \cos t$$

$$dx = -\sin t$$

$$S = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = -2 \int_{\pi}^0 \sqrt{4-4\cos^2 t} \cdot \sin t dt =$$

$$\hat{=} 4 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 4 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$\hat{=} 2 \left[\int_0^{\pi} dt - \int_0^{\pi} \cos 2t dt \right] = 2 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = 2\pi$$

Še pomnožimo s 2 za spodnjo polovico kroga.

5) Funkcija $g(x) = 2 \sin 2x$ je odvod funkcije f .

$$T\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

. Zapišite predpis za funkcijo f in narišite graf.

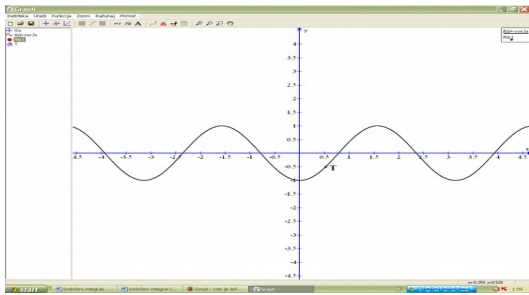
a) Graf funkcije f gre skozi točko

$$\int 2 \sin 2x dx = \int \sin u du = -\cos 2x + C$$

$$-\frac{1}{2} = -\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + C$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = -\cos 2x$$



b) Za kateri pozitivni realni k ima lik med grafom funkcije $k \cdot f(x)$ in abscisno osjo

na intervalu $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ploščino 2?

$$2 = k \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} k [\sin 2x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = k$$

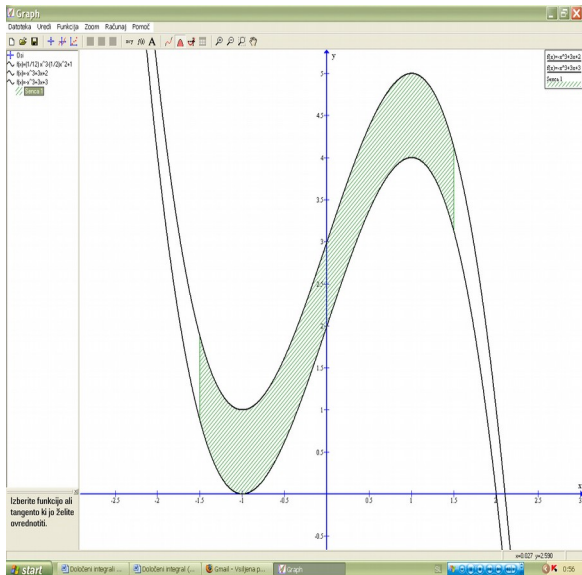
$$[2x = u] \text{ ; ;}$$

6) Izračunaj ploščino med krivuljama :

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

$$g(x) = -x^3 + 3x + 3 \text{ na intervalu } \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

[R:3]



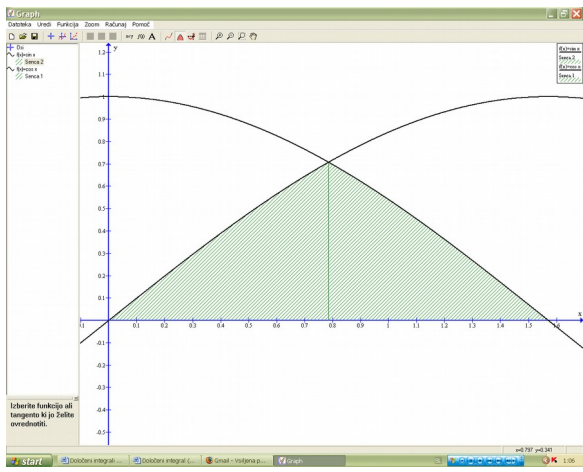
Opaziti morajo da je $g = f + 1$.

7) Izračunaj ploščino med krivuljama :

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \cos x \text{ na intervalu } \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

[R: $2 - \sqrt{2}$]



Ločimo na dva integrala.....

Časovna razporeditev aktivnosti

AKTIVNOST	ČAS
Motivacija	2'
Ponovitev	5'
Vaje	80'
Domača naloga	1'

DELOVNI LIST

1) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujo:

- $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

- tangenta na $f(x)$ v točki $T(2, y)$

- abscisna os

$$\left[R: 10 \frac{2}{3} \right]$$

2) Določi ploščino lika med funkcijama nad abscisno osjo:

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = -|x| + 2$$

$$[R: 2]$$

3) Izračunaj presek parabol :

$$f(x) = 4x - x^2$$

$$g(x) = x^2 - 2x$$

$$[R: 9]$$

4) Z integralom izračunaj ploščino kroga z enačbo krožnice : $x^2 + y^2 = 4$

$$[R: 4\pi]$$

5) Funkcija $g(x) = 2 \sin 2x$ je odvod funkcije f .

a) Graf funkcije f gre skozi točko $T\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$. Zapišite predpis za funkcijo f in narišite graf.

b) Za kateri pozitivni realni k ima lik med grafom funkcije $k \cdot f(x)$ in abscisno osjo

na intervalu $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ploščino 2?

6) Izračunaj ploščino med krivuljama :

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

$$g(x) = -x^3 + 3x + 3 \quad \text{na intervalu} \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$[R: 3]$$

7) Izračunaj ploščino med krivuljama :

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \cos x \quad \text{na intervalu} \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$[R: 2 - \sqrt{2}]$$