

KVADRATNA FUNKCIJA, ENAČBA, NEENAČBA

List1

- 1.) Preoblikuj v temensko obliko in nariši graf: $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$
- 2.) Nariši:
 $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
 $g(x) = |x^2 - 2x + 6|$
 $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2|x| + 2$
- 3.) $f(x) = x^2 + bx + 5, f(-1) = \frac{3}{2}$, izračunaj b. Rešitev: $9/2$
- 4.) Določi k tako, da bo točka M(-1, -1) na grafu funkcije $f(x) = 2k - 2x + 3kx - 3x^2$
Rešitev: 0
- 5.) Zapiši enačbo kvadratne funkcije, katere graf poteka skozi točke A(1, 4), B(2, 15), C(-1, 0).
Rešitev: $y = 3x^2 + 2x - 1$
- 6.) Zapiši enačbo kvadratne funkcije, katere graf poteka skozi točke A(-1, 8), B(2, -1), C(-3, 24).
Rešitev: $y = x^2 - 4x + 3$
- 7.) Napiši kvadratno funkcijo, katere graf gre skozi točki A(2, 18), B(-3, -12), če veš, da je $f(3) = 42$.
Rešitev: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$
- 8.) Zapiši enačbo parabole, ki ima teme v T(-, 5) in gre skozi A(-2, 1).
Rešitev: $f(x) = -4x^2 - 8x + 1$
- 9.) Iz množice parabol $f(x) = kx^2 + (k-3)x + 5$ določi tisto, ki ima teme v točki T(-1, y).
Rešitev: $k = -3$
- 10.) Za katere vrednosti parametra a se graf funkcije $f(x) = (a-1)x^2 - (a+2)x + 3$ dotika abscisne osi?
Rešitev: 4
- 11.) Zapiši kvadratno funkcijo, ki ima ničli 3 in -5 ter največjo vrednost 8.
Rešitev: $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$
- 12.) Določi a, da bo imela funkcija $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ največjo vrednost 2. Rešitev: a = -1
- 13.) Pri katerem x zavzame kvadratna funkcija $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2$ najmanjšo vrednost?
Rešitev: 2
- 14.) Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima maksimum pri $x = 2$, njen graf seka abscisno os pri $x = -1$. Kolikšno vrednost morajo imeti koeficienti a, b, c, da bodo presečišča grafa z abscisno osjo in teme grafa oglišča enakostraničnega trikotnika?

$$\text{Rešitev: } a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, b = \frac{4\sqrt{3}}{3}, c = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

15.) Dana je funkcija $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$, izračunaj $f(2x-1)$.

16.) Dana je funkcija $f(2x+1) = x^2 + x - 2$, izračunaj $f(x)$.

17.) Reši enačbo $3x^2 + 3\sqrt{2}x + \sqrt{2} = -x$ Rešitev: $-\frac{1}{3}, -\sqrt{2}$

18.) Reši enačbe:

$$\frac{x-2}{2x^2+4x} - \frac{x+2}{3x^2-6x} = \frac{4}{4-x^2}$$

$$2(x+x^{-1})^2 - 5(x+x^{-1}) + 2 = 0$$

$$2x^4 - 9x^2 - 5 = 0$$

19.) Vsota cifer dvomestnega števila je 8, vsota kvadratov teh cifer pa je za 1 manjša od dvomestnega števila. Poišči to število.

20.) Razdruži 12 na dva taka sumanda, da bo vsota njunih kvadratov najmanjša.

21.) V pravokotni trikotnik s katetama 3 in 4 cm včrtaj pravokotnik največje ploščine (eno oglišče pravokotnika naj bo v C). Izračunaj stranici pravokotnika.

22.) Razdruži število 10 na dva sumanda tako, da bo vsota dvakratnika kvadrata prvega števila in trikratnika kvadrata drugega števila najmanjša.

23.) Dani sta premica in parabola. Določi n oz. a tako, da bo premica tangenta parabole in izračunaj dotikališče:

a.) $y = x + n, y = 2x^2 - 6x - 8$

b.) $y - ax + 1 = 0, y = 2x^2 - 3x + 1$

24.) Določi n tako, da bo imela enačba $a^4 + 1 + x^2 = (a^2 + 2)x + 2a^2$ oba korena med seboj enaka.

25.) Zapiši kvadratno enačbo, ki ima rešitvi

a.) $x_1 = 2, x_2 = -1$

b.) $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$

26.) Zapiši kvadratno funkcijo, ki ima ničli 1 in 5, njen graf pa poteka skozi točko A(2, 3).

27.) Dana je kvadratna enačba $3x^2 - x - 7 = 0$, katere rešitvi sta x_1 in x_2 . Ne da bi rešili enačbo izračunajte vrednosti izraza:

a.) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b.) $x_1^2 + x_2^2$

28.) Ne da rešiš enačbo $mx^2 - (2m+1)x + 1 = 0$ izračunaj m , da bo $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$

29.) Dana je kvadratna enačba $3x^2 - 2x + 5 = 0$. Zapiši kvadratno enačbo, ki ima rešitvi $y_1 = x_1 + 2, y_2 = x_2 + 2$

30.) Okrajšaj ulomek: $\frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 3x - 10}$

31.) V enačbi $x^2 - (m+2)x + 35 = 0$ določi m tako, da bo vsota korenov enačbe 12.

32.) V enačbi $x^2 - (m+1)x + m + 18 = 0$ določi m tako, da bo en koren za 3 večji od drugega.

List2

1.) Splošna, temenska oblika, teme in ničle kvadratne funkcije

2.) Spreminjanje splošne oblike v temensko, risanje

3.) Risanje kv. funkcije podane v splošni obliki

4.) Preoblikuj v temensko obliko in nariši graf: a.) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$
b.) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

5.) Nariši: $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

6.) $f(x) = x^2 + bx + 5, f(-1) = \frac{3}{2}$ Določi b! Rešitev: 9/2

7.) Določi k tako, da bo točka M(-1,-1) na grafu funkcije $f(x) = 2k - 2x + 3kx - 3x^2$ in načrtaj graf. Rešitev: 0

8.) $f(x) = x^2 + (a+4)x + b$ Določi a in b, če veš, da poteka graf skozi točki A(-2,7), B(3,-8) in nariši $|f(x)|$ Rešitev: a = -8, b = -5

9.) Reši enačbo: $3x^2 + 3\sqrt{2}x + \sqrt{2} = -x$

10.) Zapiši enačbo kvadratne funkcije, katere graf poteka skozi točke:

a.) A(1,0), B(5,0), C(3,-3)

b.) A(-1,8), B(2,-1), C(-3,24)

11.) Napiši kvadratno funkcijo, katere graf gre skozi točki A(2,18), B(-3,-12), če veš, da je $f(3)=42$.

12.) Zapiši enačbo parabole, ki ima teme v T(-1,5) in gre skozi A(-2,1).

13.) Iz množice parabol $f(x) = kx^2 + (k-3)x + 5$ določi tisto, ki ima teme v T(-1,y)

14.) Za katere vrednosti paramera a se graf funkcije $f(x) = (a-1)x^2 - (a+2)x + 3$ dotika abscisne osi? Rešitev: 4

15.) Zapiši kvadratno funkcijo, ki ima ničli 3 in -5 ter največjo vrednost 8.

Rešitev: $-1/2, -1, 15/2$

16.) Pri katerem x zavzame kv. funkcija $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2$ najmanjšo vrednost? Rešitev: 2

17.) Določi a , da bo imela funkcija $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ najmanjšo vrednost 2.

18.) Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima maksimum pri $x = 2$, njen graf pa seka abscisno os pri $x = -1$. Kolikšne vrednosti morajo imeti koeficienti a, b, c , da bodo presečišča grafa z abscisno

osjo in teme grafa oglišča enakostraničnega trikotnika? Rešitev: $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

19.) Določi v prvem primeru $f(x)$ in v drugem $f(x-1)$

a.) $f(x-2) = x^2 - 3x + 1$

b.) $f(2x+1) = x^2 + x - 2$

20.) Reši enačbe:

a.) $\frac{x-2}{2x^2+4x} - \frac{x+2}{3x^2-6x} = \frac{4}{4-x^2}$

b.) $\frac{3(x-2)}{x^2+x-2} + \frac{2x}{x+2} + \frac{3x}{1-x} = 0$

c.) $\frac{3x-1}{x+3} - \frac{x+3}{3x-1} = \frac{3}{2}$

d.) $2(x+x^{-1})^2 - 5(x+x^{-1}) + 2 = 0$

Rešitev: 1

e.) $\frac{(x-1)^2}{x+1} + 2(x-1) = \frac{(x+3)(x-1)}{x+1}$

f.) $\left(\frac{x^2-5}{x-3}\right)^2 - 20 = \frac{8x^2-40}{x-3}$

g.) $2x^4 - 9x^2 - 5 = 0$

21.) Vsota cifer dvomestnega števila je 8, vsota kvadratov teh cifer pa je za 1 manjša od dvomestnega števila. Poišči to število.

22.) Razdruži 12 na dva taka sumanda, da bo vsota njunih kvadratov najmanjša.

23.) V pravokotni trikotnik s katetama 3 in 4 cm včrtaj pravokotnik največje ploščine (eno oglišče pravokotnika naj bo v C). Izračunaj stranici pravokotnika.

24.) Razdruži število 10 na dva sumanda tako, da bo vsota dvakratnika kvadrata prvega števila in trikratnika kvadrata drugega števila najmanjša.

25.) Dani sta premica in parabola: a.) $y = x + n, y = 2x^2 - 6x - 8$

b.) $y - ax + 1 = 0, y = 2x^2 - 3x + 1$

Določi n tako, da bo premica tangenta parabole in izračunaj dotikališče.

26.) Določi a tako, da bo imela kvadratna enačba $(a - 1)x^2 + a + 4 = 2(a + 1)x$ realne rešitve.

27.) Določi a tako, da bo imela enačba $a^4 + 1 + x^2 = (a^2 + 2)x + 2a^2$ oba korena med seboj enaka.

28.) Zapiši kvadratno enačbo, ki ima rešitvi $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

29.) Dana je kvadratna enačba $3x^2 - x - 7 = 0$, katere rešitvi sta x_1 in x_2 . Ne da bi rešili enačbo

izračunajmo vrednosti izraza a.) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b.) $x_1^2 + x_2^2$

30.) Ne da rešiš enačbo $mx^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$, izračunaj m, da bo $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$

31.) Dana je kvadratna enačba $3x^2 - 2x + 5 = 0$. Zapiši kvadratno enačbo, ki ima rešitvi $y_1 = x_1 + 2$, $y_2 = x_2 + 2$

32.) Reši neenačbo $2x^2 - x - 10 < 0$

33.) Reši sistem neenačb: $(2x^2 + 5x + 2 > 0) \wedge (-x^2 + 3x + 10 \leq 0)$

34.) $\frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} > 0$

35.) $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} \leq -1$

36.) V enačbi $(k - 1)x^2 + (k - 5)x - (k + 2) = 0$ določi k tako, da bo

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$, $(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 < 2)$

37.) Reši neenačbo $|x^2 - 4x - 5| < x + 1$

38.) Nariši funkciji: $f(x) = 2x^2 - 4|x| - 6$, $g(x) = x - |x + x^2|$

39.) Okrajšaj ulomek: $\frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 3x - 10}$

40.) Poišči presečišči parabol in nariši sliko: $y = x^2 + x - 1$, $y = -x^2 + 3x + 1$

41.) Določi n, da bo premica sekanta parabole: $y = -7x + n$, $y = x^2 - 3x + 5$

42.) V enačbi $x^2 - (m + 2)x + 35 = 0$ določi m tako, da bo vsota korenov enačbe 12.

43.) V enačbi $x^2 - (m + 1)x + m + 18 = 0$ določi m tako, da bo en koren za 3 večji od drugega.

44.) Tetiva kroga je za 4 cm krajša od premera kroga, njena središčna razdalja pa je za 4 cm krajša od polmera kroga. Izračunaj dolžino tetive.

45.) Kateri mnogokotnik ima 90 diagonal?

46.) Pri množenju dveh naravnih števil, od katerih je eno za 10 večje od drugega, je napravil učenec napako in so bile zato desetice produkta za 4 premajhne. Ko je za preizkus delil rezultat z manjšim faktorjem, je dobil kvocient 39 in ostanek 22. Kateri števili je množil?

47.) Določi m tako, da bo funkcija $f(x) = (m+1)x^2 + 4x + 2m$ negativna za vsak x .

48.) Določi točko, skozi katero potekajo vse parabole dane družine $y = ax^2 - 2x + 1$

49.) Za realni števili x in y velja $2x + y = 3$. Kolikšna je najmanjša vrednost izraza $x^2 + y^2$?

50.) Kolikšen naj bo a v kvadratni enačbi $x^2 - ax + a - 1 = 0$, da bo vsota kvadratov njenih rešitev najmanjša?

51.) Dana je funkcija $f(x) = x^2 + (k+2)x + 2k$

a.) Dokaži, da so za vsak k koreni enačbe $f(x) = 0$ realni.

b.) Določi k tako, da ima enačba $f(x-k) - 2x = 0$ rešitvi 0 in 7. Za tako določeno vrednost k poišči minimum funkcije $y = f(x-k) - 2x$

52.) Nariši $y = |1 - x^2| + |4 - x^2|$

53.) Reši enačbo $\frac{2}{x + \sqrt{5}} - \sqrt{5} = \frac{2}{x - \sqrt{5}}$

54.) Dana je kvadratna enačba $6x^2 + ax + 1 = 0$

a.) Določi a tako, da bo en koren dvakratnik drugega

b.) Določi a tako, da bo $x_1^3 + x_2^3 = 0$

c.) Določi a , da bo premica $y = 2x - 1$ mimobežnica parabole $y = 6x^2 + ax + 1$

d.) Določi a , da bo funkcija $f(x) = 6x^2 + ax + 1$ povsod pozitivna.

55.) Reši neenačbo $x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0$

56.) Reši enačbo $\sqrt{2(5-x)} - \sqrt{1-x} = 2$

57.) Nariši

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2; & x^2 + 2x \geq 0 \\ -x^2 + x - 2; & x^2 + 2x < 0 \end{cases}$$

58.) Obravnavaj enačbo $(a+2)x^2 + (3a-2)x + (a-1) = 0$

List3

- 1) Dana je kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + x - 4$. Izberi koeficient a tako, da bo graf potekal skozi točko $A(-2, -4)$. Izračunaj ničli, teme in nariši graf.
 $R: \left\{ a = \frac{1}{2}; x_1 = -4, x_2 = 2; T \left(-1, -4\frac{1}{2} \right) \right\}$
- 2) Izračunaj presečišče parabole $y = -x^2 + 2x + 3$ in premice $y = x + 1$.
 $R: \{P_1(2,3), P_2(-1,0)\}$
- 3) Naj bosta a in b dve različni realni števili. Pokaži, da ima enačba $x(x + 2a) = -b(x + a)$ dve realni rešitvi. $R: \{D = 4a^2 + b^2\}$
- 4) Kvadratna funkcija ima ničli -2 in 3 . Njen graf seka ordinatno os v točki $A(0, -3)$. Zapiši enačbo kvadratne funkcije, izračunaj koordinati temena in nariši graf.
 $R: \left\{ y = \frac{1}{2}(x+2)(x-3), T \left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{8} \right) \right\}$
- 5) Kvadratna funkcija ima vodilni koeficient $a = 1$, eno od ničel $x_1 = 3$ in ekstremno vrednost za $x = 1$. Zapiši to funkcijo. $R: \{p=1, x_1=3, x_2=-1, y=(x-3)(x+1)\}$
- 6) Izračunaj ničli, teme, presečišče z ordinatno osjo in nariši graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$. Zapiši funkcijo v ostalih oblikah in določi zalogo vrednosti dane funkcije. $R: \left\{ x_1 = 3, x_2 = -1, T(1, -2), \left(0, -\frac{3}{2}\right), y = \frac{1}{2}(x-3)(x+1), y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2, Z_f = (-\infty, -2] \right\}$
- 7) Parabolo z enačbo $y = (x-1)^2 - 1$ prezrcali čez koordinatno izhodišče. Nariši tako dobljeno krivuljo in zapiši njeno enačbo. $R: \{y = -(x+1)^2 + 1\}$
- 8) Določi parameter a tako, da bo teme parabole $y = 2x^2 + 4x + a + 1$ ležalo na premici $5x + 2y - 1 = 0$. $R: \{a = 4\}$

9) Reši enačbo $\frac{2x+1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x+1)} = \frac{1}{x-1}$. $R: \{x=0\}$

10) Nariši graf funkcije $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Zapiši interval na katerem je funkcija padajoča. $R: [-1, \infty)$

11) Reši kvadratno enačbo $x^2 - ax + a = 0$ za $a = -2$. Rešitve poenostavi in zapiši točni vrednosti. Pri katerih vrednostih parametra a ima enačba $x^2 - ax + a = 0$ eno samo rešitev ? $R: \{x_1 = -1 + \sqrt{2}, x_2 = -1 - \sqrt{2}; a=0, a=4\}$

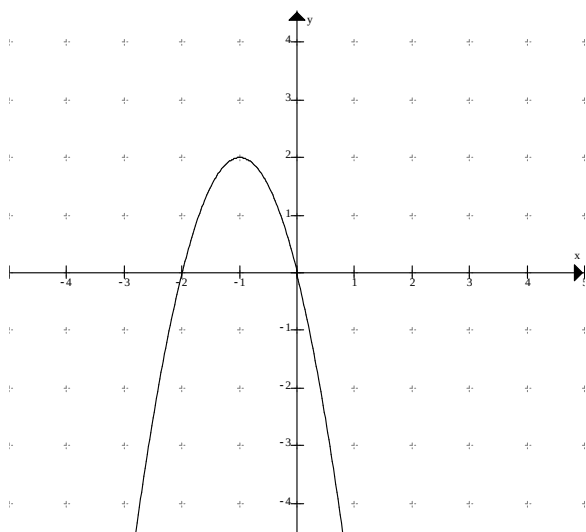
12) Naj bosta x_1 in x_2 rešitvi enačbe $\sqrt{2}x^2 - 4x - 2\sqrt{2} = 0$. Izračunaj vrednost izraza $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$. $R: \{4\}$

13) Okrajšaj ulomka a) $\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{2x^2 - 7x + 3}$ b) $\frac{\sqrt{2}x - 1}{2x^2 - 3\sqrt{2}x + 2}$
 $R: \left\{ a) \frac{(x+1)(x-1)}{(2x-1)}, b) \frac{\sqrt{2}}{2x-2\sqrt{2}} \right\}$

14) Dana je kvadratna funkcija $f(x) = \frac{1}{a}x(x+a)$
 a) Za $a = 4$ nariši graf funkcije f . $R: \{x_1=0, x_2=-4, Z(-2, -1), (0, 0)\}$

b) S parametrom a izrazi koordinati temena T in ploščino S trikotnika, ki ima oglišča v temenu in v ničlah funkcije f . Pri katerih vrednostih parametra a je ploščina tega trikotnika enaka 32 ? $R: \left\{ T \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{4} \right), x_1=0, x_2=-a, a=\pm 16 \right\}$

15) Dan je graf f kvadratne funkcije.

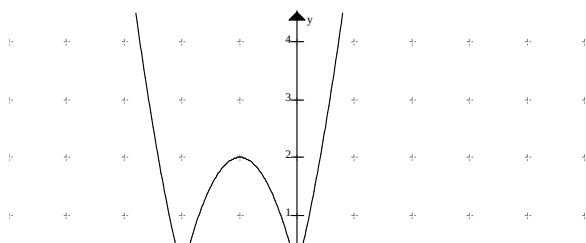


a) Zapiši funkcijski predpis za dano funkcijo. $R: \{f(x) = -2x(x+2)\}$

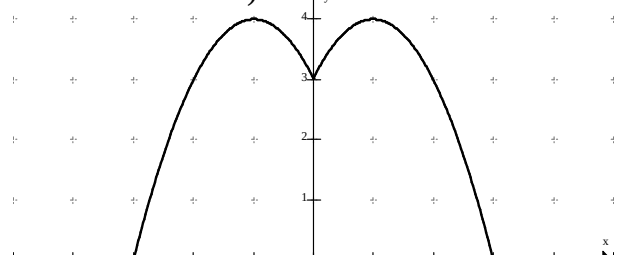
b) Nariši grafa funkcij $g(x) = f(x+2), h(x) = f(|x|)$ in zapiši njuna funkcijska predpisa.
 $R: \{g(x) = -2(x+2)(x+4), h(x) = -2x^2 - 4|x|\}$

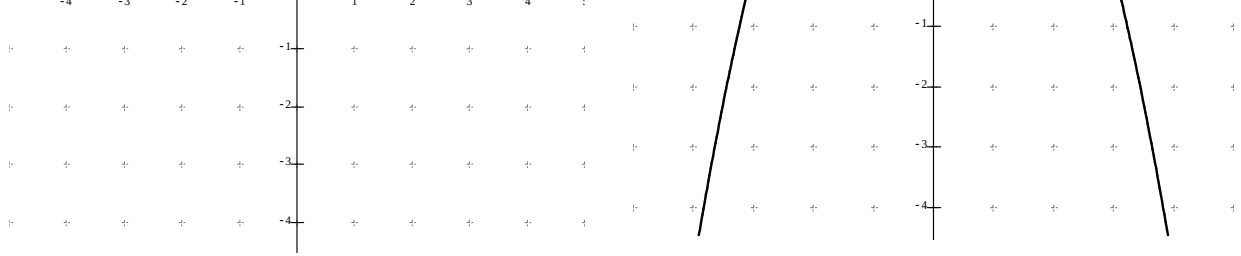
16) Na sliki je graf kvadratne funkcije. Zapiši njen funkcijski predpis.

a) $R: \{f(x) = |2x^2 + 4x|\}$



b) $R: \{f(x) = -x^2 + 2|x| + 3\}$





17) Dana je kvadratna funkcija $f(x) = -(x-2)^2 + 1$

a) Zapiši kvadratno funkcijo v ostalih oblikah. $R: \{f(x) = -x^2 + 4x - 3, f(x) = -(x-3)(x-1)\}$

b) Izračunaj k tako, da bo premica $y = kx - 3$ tangenta dane parabole. Izračunaj dotikališče. $R: \{k=4, D(0, -3)\}$

18) Pravokotnik ima obseg 46 cm in ploščino 120 cm². Izračunaj dolžino diagonale.

$R: \{d=17\text{ cm}\}$

List4

1. Določi kvadratno funkcijo, katere graf ima teme v $T(-2, -2)$ in odseka na pozitivnem delu ordinatne osi odsek 2. Nariši tudi graf.

2. Izračunaj vrednost izraza: $I = (x_1 - x_2)^2 + 3x_1x_2 + 3x_1^2x_2$, kjer sta x_1 in x_2 korena kvadratne enačbe: $2x^2 + 3x + 7 = 0$. Pri tem seveda ne smeš rešiti kvadratne enačbe.

3. Določi a tako, da bo premica $y = 2x - 4$ tangenta parabole $y = x^2 + ax$. Nariši graf.

4. Določi intervale na abscisni osi, kjer parabola $y = x^2$ leži pod premico $y = -x + 2$.

5. Zapiši kvadratno funkcijo, ki ima ničli $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ ter najmanjšo vrednost -8 . Zapiši jo v vseh treh oblikah in jo nariši.

6. Za katere vrednosti parametra a je funkcija $f(x) = ax^2 - (a-3)x + 4a$ negativna za vsak x ?

7. Pri katerih vrednostih parametra m sta korena enačbe $mx^2 = (2m-3)x + 1$ enaka?

8. Zapiši kvadratno funkcijo, ki ima teme v točki $T(2, 2)$ in ničlo pri $x=3$. Zapiši jo v vseh treh oblikah in jo nariši.

9. Določi parameter m tako, da bo funkcija $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1)$ pozitivna za vsak x .

10. Zapiši kvadratno enačbo, ki ima za korena trikratnik vsote in trikratnik produkta korenov enačbe $3x^2 + 4x - 4 = 0$ brez reševanja te enačbe.

11. Pri katerih vrednostih parametra a sta korena enačbe $(a-1)x^2=2(a+1)x+2(a-1)$ enaka ?
12. Dana je kvadratna funkcija $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$. Zapiši funkcijo v temenski in obliki za ničle ter nariši graf.
13. Reši sistem neenačb $(x^2-11x+24<0) \cup (-x^2+5x+14>0)$.
14. Reši enačbo $4z^2-8z+5=0$ v obsegu kompleksnih števil
15. Za družino parabol $y=(a-1)x^2-(a+1)x+3$ poišči take vrednosti parametra a , da bodo parabole dvakrat sekale os x .
16. Reši enačbo $x^4-48x^2-49=0$ a) v obsegu \mathbf{R} števil; b) v obsegu \mathbf{C} števil;
17. Iz družine parabol $y=(a-1)x^2-(a+1)x+3$ določi tisto, ki se dotika osi x . Zapiši njeno enačbo.
18. Grafično in računsko poišči presečišče premice $y=2x-7$ in parabole $y=x^2-6x+5$.
19. Poišči tak parameter m , da bo imela enačba $(m-1)x^2=(4x-5)m-3$ eno samo dvojno rešitev. Zapiši enačbo.
20. Zapiši kvadratno enačbo z realnimi koeficienti, ki ima eno rešitev $x_1=1-i\sqrt{2}$.